Table des matières

Partie 1 – Analyse dans $\mathbb{R}$

Partie 2 – Analyse dans $\mathbb{R}^n$

Partie 3 – Algèbre générale

Partie 4 – Algèbre linéaire et multilinéaire

Partie 5 – Géométrie

Partie 1

Analyse dans $\mathbb{R}$

1 Nombres réels

1re année

1. Premières propriétés

1.1 Corps ordonné

On dit que l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est

- un **corps** pour dire qu'il est muni de deux opérations $+$ et $\times$, avec toutes les propriétés dont vous avez l'habitude ;
- un **corps ordonné** pour dire que la relation d'ordre $\leqslant$ est compatible avec $+$ et $\times$, c'est-à-dire :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad \forall c \in \mathbb{R} \qquad a \leqslant b \Longrightarrow a + c \leqslant b + c$$

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad \forall c \geqslant 0 \qquad a \leqslant b \Longrightarrow ac \leqslant bc$$

1.2 Règles de calcul

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \, y^{n-k} \quad \text{(formule du binôme)}$$

où $\displaystyle \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$x^n - y^n = (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1} y^k .$$

1.3 Valeur absolue

- La valeur absolue d'un réel a, notée $|a|$, est définie par :

$$|a| = a \quad \text{si} \quad a \geqslant 0 \qquad ; \qquad |a| = -a \quad \text{si} \quad a \leqslant 0 .$$

- **Propriétés** $\quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R}$

$$|a| \geqslant 0 \quad ; \quad |a| = 0 \iff a = 0 \quad ; \quad |ab| = |a| \, |b|$$

$$|a+b| \leqslant |a| + |b| \quad ; \quad \big| |a| - |b| \big| \leqslant |a - b|$$

1.4 Propriété d'Archimède

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $bk > a$.

2. Intervalles

2.1 Définitions

Pour $a \leqslant b$, le segment $[a,b]$ est défini par :

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \quad ; \quad a \leqslant x \leqslant b\}$$

On utilise souvent la propriété :

$$c \in [a,b] \iff \exists t \in [0,1] \quad c = ta + (1-t)b$$

On définit de même les autres types d'intervalles :
$]a,b[$, $[a,b[$, $]a,b]$, $]a,+\infty[$, $[a,+\infty[$, $]-\infty,b[$, $]-\infty,b]$, $]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$.

2.2 Propriété caractéristique

Une partie A de $\mathbb{R}$ est un intervalle si, et seulement si :

$$\forall a \in A \quad \forall b \in A \qquad a < c < b \Longrightarrow c \in A.$$

2.3 Voisinage d'un point

Soit $a \in \mathbb{R}$. Une partie V de $\mathbb{R}$ est un voisinage de a si elle contient un intervalle ouvert centré sur a.

2.4 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Tout intervalle $]a,b[$ non vide contient au moins un rationnel et un irrationnel.

On dit que $\mathbb{Q}$ et son complémentaire $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

3. Ordre dans $\mathbb{R}$

3.1 Majoration, minoration

- **Définitions**

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que a est un majorant de A si $x \leqslant a$ pour tout x de A.

Si, en plus, $a \in A$, alors a est le plus grand élément de A, noté $\max A$.

Si A admet un majorant, on dit que A est majorée.

On définit de même : minorant, plus petit élément, partie minorée.

- **Unicité**

Si une partie non vide de $\mathbb{R}$ admet un plus grand élément, ou un plus petit élément, il est unique. Mais il peut ne pas exister.



Surveillez votre vocabulaire : **un** majorant, **le** plus grand élément.

- **Cas particulier des entiers naturels**

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

3.2 Borne supérieure, inférieure

- **Définitions**

La borne supérieure de A est le plus petit élément (s'il existe) de l'ensemble des majorants de A.

La borne inférieure de A est le plus grand élément (s'il existe) de l'ensemble des minorants de A.

- **Caractérisation**

M est la borne supérieure de A si, et seulement si, on a, à la fois :

$\forall x \in A \quad x \leqslant M$, c'est-à-dire que M est un majorant ;

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, x \in A \quad M - \varepsilon < x$, c'est-à-dire que $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant.

m est la borne inférieure de A si, et seulement si, on a, à la fois :

$\forall x \in A \quad m \leqslant x$, c'est-à-dire que m est un minorant ;

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, x \in A \quad x < m + \varepsilon$, c'est-à-dire que $m + \varepsilon$ n'est pas un minorant.

- **Remarque**

Si A admet un plus grand élément, alors c'est la borne supérieure de A.

Si A admet un plus petit élément, alors c'est la borne inférieure de A.

- **Théorème d'existence**

Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure).

3.3 Droite numérique achevée

Pour ne pas avoir de restriction dans le théorème précédent, on considère un nouvel ensemble noté $\overline{\mathbb{R}}$ obtenu à partir de $\mathbb{R}$ par l'adjonction de deux éléments notés $-\infty$ et $+\infty$.

On prolonge à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation d'ordre en posant pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$-\infty < a < +\infty.$$

On définit ainsi la droite numérique achevée dont le plus grand élément est $+\infty$, le plus petit élément $-\infty$.

Et le théorème précédent se généralise :

Toute partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.

4. Approximations décimales

4.1 Valeurs approchées

Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. On dit que b est une *valeur approchée* de a à ε près si $|a - b| < \varepsilon$, c'est-à-dire si $b \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$.

On parle de valeur approchée *par excès* si $b > a$ et *par défaut* si $b < a$.

4.2 Partie entière

Étant donné un nombre réel x, il existe un plus grand entier relatif, noté $E(x)$ ou $[x]$, tel que $E(x) \leqslant x$.

On l'appelle la partie entière de x. On a donc, par définition : $E(x) \leqslant x < E(x) + 1$.



Attention à ne pas confondre avec la suppression de la partie décimale quand $x < 0$; par exemple $E(-4{,}3) = -5$.

4.3 Valeurs décimales approchées

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Il existe un entier d unique tel que

$$d \times 10^{-n} \leqslant x < (d+1) \times 10^{-n}.$$

d est la partie entière de $10^n x$.

$d \times 10^{-n}$ s'appelle la **valeur décimale approchée de x à 10^{-n} près par défaut**, et $(d+1) \times 10^{-n}$ celle **par excès**.

2 Fonctions numériques

1re année

1. Définitions

1.1 Fonction numérique

Définir une fonction numérique f sur une partie non vide E de $\mathbb{R}$, c'est indiquer comment faire correspondre au plus un réel y à tout x de E.

Le réel y est l'image de x par f et s'écrit $f(x)$. On note :

$$f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x). \end{array}$$

L'ensemble des réels qui ont effectivement une image par f est l'ensemble de définition de f. Il est noté D_f, ou D s'il n'y a pas d'ambiguité.

1.2 Représentation graphique

Le plan étant rapporté à un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, la représentation graphique de f est l'ensemble $\mathcal{C}_f$ des points de coordonnées $\big(x, f(x)\big)$ avec $x \in D_f$.

1.3 Images et images réciproques d'ensembles

Soit $A \subset D_f$. L'image de A par f est l'ensemble :

$$f(A) = \{f(x) \ ; \ x \in A\}.$$

Soit $B \subset \mathbb{R}$. L'image réciproque de B par f est l'ensemble :

$$\overset{-1}{f}(B) = \{x \in D_f \ ; \ f(x) \in B\}.$$



Attention à ne pas confondre avec la réciproque d'une bijection. Ici, on ne suppose rien sur f.

1.4 Restriction, prolongement

Soit f une fonction définie sur I et g une fonction définie sur J. Si $I \subset J$ et si $f(x) = g(x)$ pour tout x de I, on dit que f est une restriction de g, ou que g est un prolongement de f.

2. Premières propriétés

2.1 Parité

- f est paire si

$$\forall x \in D_f \qquad (-x) \in D_f \quad \text{et} \quad f(-x) = f(x).$$

Son graphe est symétrique par rapport à (Oy).

- f est impaire si

$$\forall x \in D_f \qquad (-x) \in D_f \quad \text{et} \quad f(-x) = -f(x).$$

Son graphe est symétrique par rapport à O.

2.2 Périodicité

f est périodique, de période T (ou T-périodique), si

$$\forall x \in D_f \qquad (x+T) \in D_f \quad \text{et} \quad f(x+T) = f(x).$$

Son graphe est invariant par les translations de vecteurs $kT\overrightarrow{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2.3 Sens de variation

- f est croissante sur I si $I \subset D_f$ et

$$\forall x_1 \in I \quad \forall x_2 \in I \qquad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2).$$

- f est décroissante sur I si $I \subset D_f$ et

$$\forall x_1 \in I \quad \forall x_2 \in I \qquad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2).$$

- f est monotone sur I si elle est croissante sur I, ou décroissante sur I.
- Avec des inégalités strictes, on définit : f strictement croissante, strictement décroissante, strictement monotone, sur D_f.

2.4 Extremum

- f admet un maximum (resp. minimum) global en x_0 si :

$$\forall x \in D_f \qquad f(x) \leqslant f(x_0) \qquad (\text{resp. } f(x) \geqslant f(x_0)).$$

- f admet un maximum (resp. minimum) local en $x_0 \in D_f$, s'il existe un intervalle ouvert $I \subset D_f$, tel que :

$$\forall x \in I \quad f(x) \leqslant f(x_0) \qquad (\text{resp. } f(x) \geqslant f(x_0)).$$

Un maximum ou un minimum local est dit extremum local en x_0.

Un extremum est un maximum ou un minimum.

2.5 Fonction lipschitzienne

f est une fonction lipschitzienne de rapport k, ou $k-$lipschitzienne, si :

$$\forall x \in D \quad \forall y \in D \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x - y|\,.$$

Lorsque $k < 1$, f est dite contractante.

3. Relation d'ordre

3.1 Comparaison de fonctions

f et g étant deux fonctions, à valeurs réelles, définies sur le même ensemble de définition D, on note $f \leqslant g$ (resp. $f \geqslant g$) si :

$$\forall x \in D \quad f(x) \leqslant g(x) \quad (\text{resp. } f(x) \geqslant g(x)).$$

Si $f \geqslant 0$, f est dite positive.

3.2 Majorant, minorant

Si l'ensemble des images $f(D)$ est majoré, ou minoré, ou borné, on dit que f est majorée, ou minorée, ou bornée.

Si l'image $f(I)$ de I admet une borne supérieure, ou une borne inférieure, on parle de borne supérieure, de borne inférieure, de f sur I et on note :

$$\sup_{x \in I} f(x) \quad ; \quad \inf_{x \in I} f(x).$$

3.3 Propriétés

$$\inf_{x \in I} f(x) = -\sup_{x \in I}\big(-f(x)\big).$$

Si, pour tout $x \in I$, on a $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\sup\limits_{x \in I} f(x) \leqslant \sup\limits_{x \in I} g(x)$.

Si $I \subset J$, on a $\sup\limits_{x \in I} f(x) \leqslant \sup\limits_{x \in J} f(x)$.

4. Opérations sur les fonctions

4.1 Valeur absolue d'une fonction

f étant définie sur D, la fonction $|f|$ est définie sur D par $x \mapsto |f(x)|$.

On définit aussi f^+ et f^- sur D par :

$$f^+(x) = \sup\,(f(x),0) \quad ; \quad f^-(x) = \sup\,(-f(x),0)\,.$$

On a alors $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$.

4.2 Opérations algébriques

Soit f et g deux fonctions numériques et λ un réel.

La fonction λf est définie sur D_f par :

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

La fonction $f + g$ est définie sur $D_f \cap D_g$ par :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

La fonction $f\, g$ est définie sur $D_f \cap D_g$ par :

$$(f\, g)(x) = f(x)\, g(x).$$

La fonction $\dfrac{f}{g}$ est définie sur $D_f \cap D_g \setminus \{x \,;\, g(x) = 0\}$ par :

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\,.$$

4.3 Composition

On appelle composée de f par g la fonction, notée $g \circ f$, définie sur $D_f \cap \overset{-1}{f}(D_g)$ par :

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big).$$

3 Limites : généralités

1re année

1. Limites

Soit f une fonction, à valeurs réelles, définie sur un intervalle I contenant au moins deux points.

1.1 Limite d'une fonction en x_0

Soit x_0 un point appartenant à I, ou extrémité de I. On dit que f admet une limite finie l en x_0, et on note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon\,.$$



Cette limite peut exister même si f n'est pas définie en x_0. Mais si f est définie en x_0 et si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Si une fonction admet une limite l en x_0, cette limite est unique.

1.2 Limite à gauche, limite à droite

- f admet une limite à droite l en x_0 si la restriction de f à $I \cap\,]x_0, +\infty[$ admet pour limite l en x_0. On note : $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l$.
- f admet une limite à gauche l en x_0 si la restriction de f à $I \cap\,]-\infty, x_0[$ admet pour limite l en x_0. On note : $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$.
- Si f est définie sur un intervalle de la forme $]x_0 - a, x_0 + a[$, sauf en x_0, alors :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l\,.$$

Si f est définie en x_0, ces deux limites doivent aussi être égales à $f(x_0)$.

1.3 Limite infinie en x_0

- On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 si :

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| \leqslant \delta \Longrightarrow f(x) \geqslant A\,.$$

On note : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

- On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 si :

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| \leqslant \delta \Longrightarrow f(x) \leqslant -A\,.$$

On note : $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty\,.$

1.4 Limite de *f* lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$

- On dit que f a pour limite l quand x tend vers $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x \geqslant B \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon\,.$$

On note : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l\,.$

On définit de manière analogue $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l\,.$

- On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x \geqslant B \Longrightarrow f(x) \geqslant A\,.$$

On note : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\,.$

On définit de manière analogue $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty\ \ldots$

2. Propriétés des limites

2.1 Propriétés liées à l'ordre

- Si f admet une limite finie en x_0, alors f est bornée au voisinage de x_0.
- Si f admet une limite finie $l > 0$ en x_0, alors il existe $a > 0$ tel que $f \geqslant a$ au voisinage de x_0.
- Si f est positive au voisinage de x_0 et admet une limite finie l en x_0, alors $l \geqslant 0$.
- Si $f \leqslant g$ au voisinage de x_0, et si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$, alors $l \leqslant m$.

- **Théorème d'encadrement (ou des gendarmes, ou sandwich)**

Soit f, g et h trois fonctions définies au voisinage de x_0, et vérifiant $f \leqslant g \leqslant h$ au voisinage de x_0.

Si f et h ont la même limite l (finie ou infinie) en x_0, alors g a pour limite l en x_0.

- Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0, et vérifiant $f \leqslant g$ au voisinage de x_0.

Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty\,.$

Si $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty\,.$

2.2 Opérations algébriques

Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 et admettant des limites l et m en x_0, et λ un réel.

Alors les fonctions $f+g$, λf et fg admettent respectivement pour limites en x_0 : $l+m$, λf et lm.

Si de plus $m \neq 0$, $\frac{1}{g}$ a pour limite $\frac{1}{m}\cdot$

2.3 Fonction composée

- Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 avec $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = u_0$ et g définie au voisinage de u_0 telle que $\lim\limits_{u \to u_0} g(u) = v$.

Alors $g \circ f$ est définie au voisinage de x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = v$.

- **Image d'une suite convergente**

Soit f définie sur un intervalle I et a un point de I.

f a pour limite l au point a si, et seulement si, pour toute suite (x_n) convergeant vers a, la suite $\big(f(x_n)\big)$ converge vers l, finie ou non.



Pour démontrer qu'une fonction f n'a pas de limite lorsque x tend vers a, il suffit de fournir un exemple de suite (x_n) qui tende vers a et telle que $\big(f(x_n)\big)$ soit divergente.

2.4 Cas des fonctions monotones

Soit f une fonction monotone sur $]a,b[$. Elle admet en tout point x_0 de $]a,b[$ une limite à droite et une limite à gauche.

Lorsque f est croissante, si elle est majorée, elle admet en b une limite à gauche finie, si elle n'est pas majorée, elle tend vers $+\infty$ quand x tend vers b^-.

Pour f décroissante, on a la propriété analogue en a.

Limites : comparaisons locales



1re année

1. Comparaison au voisinage d'un point

Soit f et g deux fonctions définies sur I, et x_0 un point, fini ou infini, appartenant à I, ou extrémité de I.

1.1 Définitions

- On dit que f est dominée par g au voisinage de x_0 s'il existe $A > 0$ tel que $|f(x)| \leqslant A\,|g(x)|$ pour tout x d'un voisinage J de x_0.

notation : $f = O(g)$.

Si g ne s'annule pas sur J, cela signifie que $\dfrac{f}{g}$ est bornée sur J.

- On dit que f est négligeable devant g, ou que g est prépondérant devant f, au voisinage de x_0 si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage J de x_0 tel que l'on ait $|f(x)| \leqslant \varepsilon\,|g(x)|$ pour tout x de J.

notation : $f = o(g)$.

Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0, cela signifie :

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = 0\,.$$

- On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de x_0, si on a $f - g = o(g)$. Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0, cela signifie :

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = 1\,.$$

notation : $f \sim g$ ou $f \underset{x_0}{\sim} g$.

La relation $\underset{x_0}{\sim}$ est transitive. Si on sait que $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $g \underset{x_0}{\sim} h$, on en déduit que $f \underset{x_0}{\sim} h$.

1.2 Exemples fondamentaux

Au voisinage de $+\infty$, on a :

$$(\ln x)^\alpha = o(x^\beta) \quad \text{et} \quad x^\beta = o(\mathrm{e}^{\gamma x}) \quad \text{où} \quad \alpha > 0\,,\ \ \beta > 0\,,\ \ \gamma > 0\,.$$

Au voisinage de 0, on a :

$$|\ln x|^\alpha = o(x^\beta) \quad \text{où} \quad \alpha > 0 \quad \text{et} \quad \beta < 0\,.$$

1.3 Propriétés des fonctions équivalentes

Si $f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2$, alors $f_1 f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1 g_2$ et $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$.

Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.



Des deux théorèmes précédents, il résulte que, lorsque l'on a à chercher la limite d'un produit ou d'un quotient, on peut remplacer chacune des fonctions par une fonction équivalente, choisie pour simplifier le calcul.

Mais attention à ne pas effectuer un tel remplacement dans une somme, ni dans une fonction composée.

1.4 Équivalents classiques

$$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x \quad ; \quad \sin x \underset{0}{\sim} x \quad ; \quad 1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}\ ;$$
$$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x \quad ; \quad \tan x \underset{0}{\sim} x \quad ; \quad (1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x\,.$$

2. Branche infinie d'une courbe

2.1 Définition

La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f admet une branche infinie lorsque OM tend vers l'infini avec $M \in \mathcal{C}_f$.

2.2 Asymptote

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$), la droite $y = l$ est une asymptote horizontale de $\mathcal{C}_f$.

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$), la droite $x = x_0$ est une asymptote verticale de $\mathcal{C}_f$.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \big[f(x) - (ax+b)\big] = 0$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} \big[f(x) - (ax+b)\big] = 0$), la droite $y = ax + b$ est une asymptote oblique de $\mathcal{C}_f$.

2.3 Branche parabolique

Soit f admettant une limite infinie en $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Si $\dfrac{f(x)}{x}$ admet une limite infinie en $+\infty$ (resp. $-\infty$), la courbe $\mathcal{C}_f$ présente une branche parabolique verticale.

Si $\dfrac{f(x)}{x}$ admet une limite finie a lorsque x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) et si $f(x) - ax$ a une limite infinie, la courbe $\mathcal{C}_f$ présente une branche parabolique de pente a.

5 Continuité

1re année

1. Continuité en un point

- f est continue en x_0 si elle est définie en x_0 et si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- f est continue à droite (resp. à gauche) en x_0 si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ (resp. $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$).
- **Prolongement par continuité**

Soit f une fonction définie sur I et $x_0 \notin I$. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, la fonction $\tilde{f}$ définie sur $I \cup \{x_0\}$ par $\tilde{f}(x_0) = l$ et $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour $x \in I$, est la seule fonction continue en x_0 dont la restriction à I soit f. On l'appelle le prolongement par continuité de f en x_0.

2. Continuité sur un intervalle

- Soit E un ensemble qui soit un intervalle ou une réunion d'intervalles. Une fonction f, définie sur E, est dite continue sur E, si f est continue en tout point de E.
- L'ensemble $\mathcal{C}(I)$ des fonctions continues sur I constitue une algèbre, c'est-à-dire que, si f et g sont des éléments de $\mathcal{C}(I)$ et λ un réel, les fonctions $f + g$, fg et λf appartiennent à $\mathcal{C}(I)$, et les opérations ainsi définies possèdent toutes les propriétés algébriques qui caractérisent la structure que l'on appelle une algèbre (*cf.* fiche. 44).

3. Image d'un intervalle

3.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle.

3.2 Image d'un intervalle fermé

Si f est continue sur un intervalle fermé I, alors $f(I)$ est un intervalle fermé.

En particulier, si une fonction f est continue sur $[a,b]$, et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe contraire, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a,b]$.

3.3 Cas d'une fonction strictement monotone

Soit f une fonction continue et strictement croissante (resp. décroissante) sur un intervalle I.

f est une bijection de I sur $f(I)$, et sa bijection réciproque f^{-1} est continue et strictement croissante (resp. décroissante) sur l'intervalle $f(I)$.

Dans un repère orthonormé, les graphes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice des axes.

6 Fonctions dérivables

1re année

1. Définitions

1.1 Dérivée en un point

Soit f une fonction définie sur D et x_0 un élément de D tel que f soit définie au voisinage de x_0. On appelle dérivée de f au point x_0 le nombre (lorsqu'il existe) :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)\,.$$

On dit alors que f est dérivable en x_0.

Si $\displaystyle\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe, f est dite dérivable à droite en x_0, et cette limite est appelée dérivée à droite de f en x_0, et notée $f'_d(x_0)$.

On définit de même la dérivée à gauche en x_0, notée $f'_g(x_0)$.

f est dérivable en x_0 si, et seulement si, f admet en x_0 une dérivée à droite et une dérivée à gauche égales.

1.2 Fonction dérivée

f est dite dérivable sur E, si elle dérivable en tout point de E.

On appelle fonction dérivée de f sur E, la fonction, notée f', définie sur E par : $x \mapsto f'(x)$.

1.3 Dérivées successives

Soit f dérivable sur E. Si f' est dérivable sur E, on note sa fonction dérivée f'' ou $f^{(2)}$. On l'appelle dérivée seconde de f.

Pour n entier, on définit par récurrence la dérivée n-ième, ou dérivée d'ordre n, de f en posant $f^{(0)} = f$, puis $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$, lorsque $f^{(n-1)}$ est dérivable sur E.

f est dite de classe $\mathcal{C}^n$ sur E si $f^{(n)}$ existe sur E, et est continue sur E.

f est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$, ou indéfiniment dérivable, si f admet des dérivées de tous ordres.

1.4 Interprétation graphique

f dérivable en x_0 signifie que le graphe de f admet au point d'abscisse x_0 une tangente de pente $f'(x_0)$. Son équation est :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)\,.$$

Si $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$, f n'est pas dérivable en x_0, mais le graphe de f admet au point d'abscisse x_0 une tangente parallèle à Oy.

1.5 Dérivabilité et continuité

Toute fonction dérivable en x_0 est continue en x_0.



Attention, la réciproque est fausse. Par exemple, la fonction $x \mapsto |x|$ est continue, et non dérivable, en 0, car elle admet une dérivée à gauche et une dérivée à droite différentes.

2. Opérations sur les fonctions dérivables

2.1 Opérations algébriques

Si f et g sont dérivables en x_0, il en est de même de $f+g$, de fg, et de $\dfrac{f}{g}$ si $g(x_0) \neq 0$; et on a :

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0)\\
(fg)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\\
\Big(\frac{f}{g}\Big)'(x_0) &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}\,.
\end{aligned}$$

2.2 Fonction composée

Soit f une fonction dérivable en x_0 et g une fonction dérivable en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0, et

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)\,.$$

2.3 Dérivée d'une fonction réciproque

Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I. On suppose que f est dérivable en $f(x_0)$ et que $f'(x_0) \neq 0$.

Alors, la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

2.4 Formule de Leibniz

Si f et g admettent des dérivées d'ordre n en x_0, alors il en est de même de fg ; et on a :

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0) .$$

Étude globale des fonctions dérivables

7

1re année

1. Théorème de Rolle et des accroissements finis

1.1 Condition nécessaire d'extremum local

Si f admet un extremum local en x_0 et si f est dérivable, alors $f'(x_0) = 0$.

1.2 Théorème de Rolle

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, et telle que $f(a) = f(b)$.

Alors il existe au moins un point $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Autre énoncé

Si f est dérivable, entre deux valeurs qui annulent f, il existe au moins une valeur qui annule f'.

1.3 Égalité des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe au moins un point $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)\,.$$



Cette égalité, valable pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ne se généralise pas, ainsi que le théorème de Rolle.

1.4 Inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$.

Si $m \leqslant f' \leqslant M$, alors :

$$m\,(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M\,(b-a)\,.$$

En particulier, si $|f| \leqslant M$, alors $|f(b) - f(a)| \leqslant M(b-a)$.

1.5 Limite de la dérivée

Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, et si f' a une limite finie l en a, alors f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = l$.



Attention, il s'agit d'une condition suffisante de dérivabilité, mais elle n'est pas nécessaire. Il peut arriver que $f'_d(a)$ existe sans que f' ait une limite en a.

2. Variations d'une fonction dérivable

2.1 Théorème

Si, pour tout $x \in I, f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.

Si, pour tout $x \in I, f'(x) \geqslant 0$ alors f est croissante sur I.

Si, pour tout $x \in I, f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.

Ce dernier résultat est encore valable si f' s'annule en des point isolés, c'est-à-dire tels que leur ensemble ne contienne pas d'intervalle.

2.2 Condition suffisante d'extremum local

f, f' et f'' étant continues sur $]a,b[$, si en $x_0 \in]a,b[$, on a $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \neq 0$, la fonction f présente un extremum local en x_0.

C'est un maximum si $f''(x_0) < 0$, un minimum si $f''(x_0) > 0$.

3. Convexité

3.1 Partie convexe, fonction convexe

Une partie du plan est dite convexe si, dès qu'elle contient deux points A et B, elle contient tout le segment $[AB]$.

Une fonction f, définie sur un intervalle I, est convexe sur I si la partie du plan située au-dessus de la courbe est convexe ; c'est-à-dire si tout arc de sa courbe représentative est situé au-dessous de la corde correspondante. Cette définition se traduit par :

$\forall x_1 \in I \ \ \forall x_2 \in I \ \ \forall k \in [0,1]$

$$f[kx_1 + (1-k)x_2] \leqslant kf(x_1) + (1-k)f(x_2).$$

Si $-f$ est convexe, f est dite concave.

3.2 Inégalité de convexité

f étant convexe sur I, si $x_1,\ldots,x_n$ appartiennent à I, si $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ sont des réels positifs tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, alors

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

3.3 Propriété des sécantes

Soit f une fonction convexe sur I, et x_0 un point fixé dans I. La fonction φ définie sur I par :

$$\varphi(x) = \text{pente }(M_0M) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

est croissante.

3.4 Fonctions convexes dérivables

Soit f une fonction dérivable sur I. f est convexe sur I si, et seulement si, f' est croissante.

Si f est deux fois dérivable, cela correspond à f'' positive.

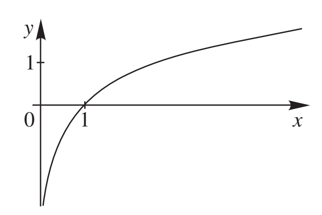
Le graphique de toute fonction convexe dérivable est au-dessus de chacune de ses tangentes.

8 Logarithmes, exponentielles et puissances

1[re] année

1. Fonction logarithme népérien

1.1 Définition et graphe



Elle est définie pour $x > 0$ par :

$$\begin{cases} \ln 1 = 0\,; \\ \forall x > 0 \qquad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}\cdot \end{cases}$$

Elle est strictement croissante.

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty\ ;\ \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty.$$

L'unique solution de l'équation $\ln x = 1$ est notée e ($\mathrm{e} \approx 2{,}718$).

1.2 Propriétés algébriques

$\forall a > 0 \quad \forall b > 0 \quad \forall r \in \mathbb{Q}$

$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad ; \quad \ln(a^r) = r \ln a \quad ; \quad \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b\,.$

1.3 Convexité

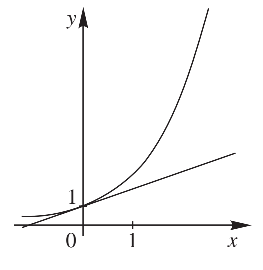
La fonction ln est concave sur $]0, +\infty[$, ce qui entraîne :

$$\forall x > -1 \qquad \ln(1 + x) \leqslant x\,.$$

La dérivée en $x = 1$ étant égale à 1, on a aussi : $\ln(1 + x) \underset{0}{\sim} x$.

2. Fonction exponentielle

2.1 Fonction exponentielle



C'est la fonction réciproque de la fonction ln. Elle est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0, +\infty[$, strictement croissante.

Elle est notée exp, ou $x \mapsto \mathrm{e}^x$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left(\mathrm{e}^x\right)' = \mathrm{e}^x$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty\,.$

2.2 Propriétés algébriques

$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad \forall r \in \mathbb{Q}$

$$e^{a+b} = e^a \times e^b \quad ; \quad e^{ra} = (e^a)^r \quad ; \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a} \quad ; \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}\cdot$$

2.3 Convexité

La fonction $x \mapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$, ce qui entraîne :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 1 + x \leqslant e^x.$$

La dérivée en $x = 0$ étant égale à 1, on a aussi : $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$.

3. Logarithme et exponentielle de base a

3.1 Logarithme de base a

La fonction logarithme de base a ($a > 0$; $a \neq 1$), est la fonction définie par :

$$\forall x > 0 \qquad \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}\cdot$$

Sa dérivée est : $(\log_a x)' = \dfrac{1}{\ln a} \times \dfrac{1}{x}\cdot$

Ses propriétés algébriques sont les mêmes que celles de la fonction ln.

Si $a = 10$, $\log_a$ est le logarithme décimal. On le note log.

3.2 Exponentielle de base a

La fonction exponentielle de base a ($a > 0$), est la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \exp_a(x) = a^x = e^{x \ln a}.$$

Pour $a \neq 1$, c'est la fonction réciproque de la fonction $\log_a$.

$$y = a^x \iff \ln y = x \ln a \iff x = \log_a(y)\ .$$

Sa dérivée est : $(a^x)' = \ln a \times a^x$.



Remarquez bien qu'ici, la variable est en exposant.

Ses propriétés algébriques sont les mêmes que celles de la fonction exp.

4. Fonctions puissances et comparaisons

4.1 Fonctions puissances

La fonction $x \mapsto x^r$, pour $x > 0$ et $r \in \mathbb{Q}$, est déjà connue. On la généralise, pour $x > 0$ et $a \in \mathbb{R}$, en posant :

$$x^a = e^{a \ln x}.$$

Les propriétés connues pour les exposants rationnels sont prolongées ; en particulier $(x^a)' = ax^{a-1}$.



Remarquez bien qu'ici l'exposant est constant.

Pour $a < 0$, la fonction $x \mapsto x^a$ est décroissante de $+\infty$ à 0.

Pour $a > 0$, la fonction $x \mapsto x^a$ est croissante de 0 à $+\infty$. Dans ce cas, on peut prolonger la fonction par continuité en 0. La fonction prolongée est dérivable en 0, si $a > 1$.

4.2 Comparaison des fonctions logarithmes et puissances

Pour $b > 0$, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^b} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+} x^b \ln x = 0\,.$$

4.3 Comparaison des fonctions puissances et exponentielles

Pour $a > 1$ et b quelconque, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty\,.$$

4.4 Comparaison des fonctions logarithmes et exponentielles

Pour $a > 1$, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{a^x} = 0\,.$$

5. Fonction exponentielle complexe

$z = a + \mathrm{i}b$ étant un nombre complexe, on définit e^z par :

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{a+\mathrm{i}b} = \mathrm{e}^a(\cos b + \mathrm{i}\sin b)\,.$$

On prolonge ainsi les propriétés de l'exponentielle réelle :

$$\forall z_1 \in \mathbb{C} \qquad \forall z_2 \in \mathbb{C}_2 \qquad \mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1} \times \mathrm{e}^{z_2}$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad \forall n \in \mathbb{Z} \qquad (\mathrm{e}^z)^n = \mathrm{e}^{nz}.$$

$z = a + \mathrm{i}b$ étant un nombre complexe fixé, on définit une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$: $t \mapsto \mathrm{e}^{zt}$ en posant :

$$\mathrm{e}^{zt} = \mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)t} = \mathrm{e}^{at}(\cos bt + \mathrm{i}\sin bt)\,.$$

La dérivée d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$: $t \mapsto \varphi(t) = f(t) + \mathrm{i}g(t)$ étant définie par : $\varphi'(t) = f'(t) + \mathrm{i}g'(t)$, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\mathrm{e}^{zt}) = z\mathrm{e}^{zt}\,.$$

9 Fonctions circulaires et réciproques

1re année

1. Fonctions circulaires et trigonométrie

1.1 Fonctions sinus et cosinus

Elles sont définies dans $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[-1,1]$. Elles sont 2π-périodiques.

La fonction cos est paire ; la fonction sin est impaire.

Dérivées :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (\sin x)' = \cos x \quad ; \quad (\cos x)' = -\sin x\,.$$



Si x est la mesure d'un angle, ces expressions des dérivées ne sont correctes que si x est exprimé en radians.

Limites :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\cdot$$

1.2 Fonction tangente

Elle est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}\}$ par : $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot$

Elle est impaire et π-périodique.

Dérivée :

$$\forall x \in D \qquad (\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}\cdot$$

Limite :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1\,.$$

1.3 Angles associés

$\cos(\pi - x) = -\cos x$; $\sin(\pi - x) = \sin x$; $\tan(\pi - x) = -\tan x$

$\cos(\pi + x) = -\cos x$; $\sin(\pi + x) = -\sin x$; $\tan(\pi + x) = \tan x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$; $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{1}{\tan x}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$; $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\dfrac{1}{\tan x}$

1.4 Formules d'addition

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad ;$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \quad ;$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

1.5 Formules de duplication

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a \ ; \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \ ; \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}.$$

1.6 Expressions en fonction de $\tan \frac{a}{2}$

En posant $t = \tan \frac{a}{2}$ on a :

$$\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad ; \quad \sin a = \frac{2t}{1+t^2} \quad ; \quad \tan a = \frac{2t}{1-t^2}.$$

1.7 Transformation d'un produit en somme

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$
$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$
$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

2. Fonctions circulaires réciproques

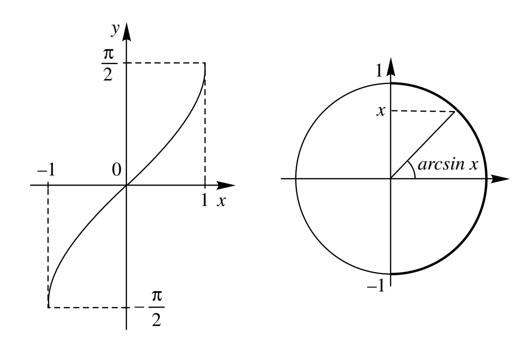
2.1 Fonction arc sinus

C'est la réciproque de la restriction à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ de la fonction sinus.

$$\left.\begin{array}{l} y = \arcsin x \\ -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} x = \sin y \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

La fonction arcsin est impaire.

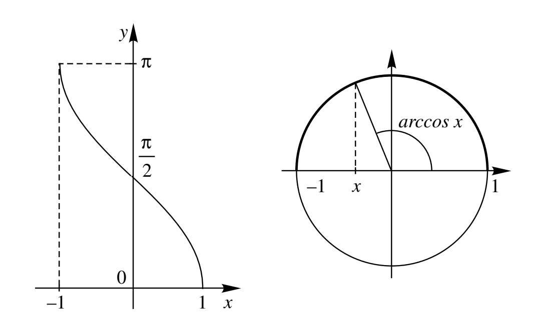
$$\forall x \in]-1,1[\qquad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$



2.2 Fonction arc cosinus

C'est la réciproque de la restriction à $[0,\pi]$ de la fonction cosinus.

$$\left.\begin{array}{c} y = \arccos\ x \\ -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} x = \cos\ y \\ 0 \leqslant y \leqslant \pi \end{array}\right.$$



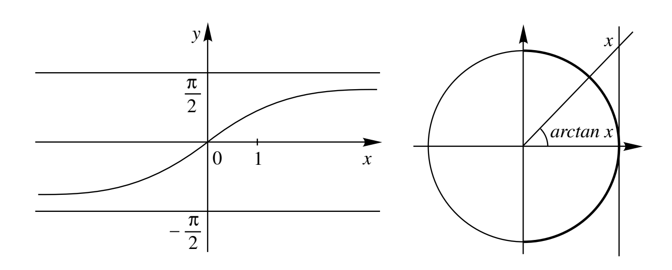
2.3 Fonction arc tangente

C'est la réciproque de la restriction à $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ de la fonction tangente.

$$\left.\begin{array}{c} y = \arctan x \\ x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} x = \tan y \\ -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

La fonction arctan est impaire.

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$



2.4 Propriétés

$$\forall x \in [-1,1] \quad \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} = \cos(\arcsin x)$$

$$\forall x > 0 \quad \arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

$$\forall x < 0 \quad \arctan x + \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$$



10 Fonctions hyperboliques et réciproques

1re année

1. Fonctions hyperboliques

1.1 Définitions

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad ; \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad ; \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.$$

ch est paire ; sh et th sont impaires.

1.2 Propriétés algébriques

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x \quad ; \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \quad ; \quad 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

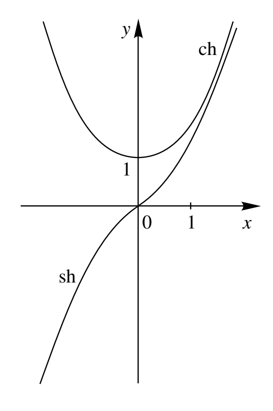
1.3 Dérivées

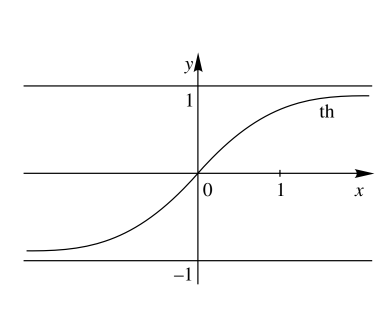
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x \quad ; \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x \quad ; \quad (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x.$$

1.4 Graphes

Le graphe de ch est situé au-dessus de celui de sh.

Le graphe de th est situé entre les deux asymptotes $y = -1$ et $y = 1$:





2. Fonctions hyperboliques réciproques

2.1 Fonction argument sinus hyperbolique

C'est la fonction réciproque de la fonction sh. La fonction argsh est impaire.

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (\text{argsh}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot$$

2.2 Fonction argument cosinus hyperbolique

C'est la fonction réciproque de la restriction à $[0,+\infty[$ de la fonction ch.

$$\forall x \in]1,+\infty[\qquad (\text{argch}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\cdot$$

2.3 Fonction argument tangente hyperbolique

C'est la fonction réciproque de la fonction th. La fonction argth est impaire.

$$\forall x \in]-1,1[\qquad (\text{argth}\, x)' = \frac{1}{1-x^2}\cdot$$

2.4 Expressions logarithmiques

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \text{argsh}\, x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$
$$\forall x \in [1,+\infty[\qquad \text{argch}\, x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$
$$\forall x \in]-1,1[\qquad \text{argth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

11 Suites numériques

1re année

1. Généralités

Une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

1.1 Suite bornée

Une suite (u_n) est majorée s'il existe un réel A tel que, pour tout n, $u_n \leqslant A$. On dit que A est un majorant de la suite.

Une suite (u_n) est minorée s'il existe un réel B tel que, pour tout n, $B \leqslant u_n$. On dit que B est un minorant de la suite.

Une suite est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire s'il existe M tel que $|u_n| \leqslant M$ pour tout n.

1.2 Suite convergente

La suite (u_n) est convergente vers l si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad |u_n - l| \leqslant \varepsilon.$$

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Lorsqu'elle existe, la limite d'une suite est unique.



La suppression d'un nombre *fini* de termes ne modifie pas la nature de la suite, ni sa limite éventuelle.

Toute suite convergente est bornée. Une suite non bornée ne peut donc pas être convergente.

1.3 Limites infinies

On dit que la suite (u_n) tend

vers $+\infty$ si : $\forall A > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad u_n \geqslant A$

vers $-\infty$ si : $\forall A > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad u_n \leqslant -A$.

1.4 Limites connues

Pour $k > 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{k^n}{n!} = 0 \quad ; \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{n^\alpha}{k^n} = 0 \quad ; \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0.$$

2. Opérations sur les suites

2.1 Opérations algébriques

Si (u_n) et (v_n) convergent vers l et et l', alors les suites $(u_n + v_n)$, $(\lambda\, u_n)$ et $(u_n\, v_n)$ convergent respectivement vers $l + l'$, $\lambda\, l$ et $l\, l'$.

Si $l' \neq 0$, $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers $\dfrac{l}{l'}$.

Si (u_n) tend vers 0 et si (v_n) est bornée, alors la suite $(u_n\, v_n)$ tend vers 0.

2.2 Relation d'ordre

Si (u_n) et (v_n) sont des suites convergentes telles que l'on ait $u_n \leqslant v_n$ pour $n \geqslant n_0$, alors on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.



Attention, pas de théorème analogue pour les inégalités strictes.

2.3 Théorème d'encadrement

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant x_n \leqslant v_n$ et si (u_n) et (v_n) convergent vers la *même* limite l, alors la suite (x_n) est convergente vers l.

2.4 Suites extraites

- La suite (v_n) est dite extraite de la suite (u_n) s'il existe une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, strictement croissante, telle que $v_n = u_{\varphi(n)}$.

On dit aussi que (v_n) est une sous-suite de (u_n).

- Si (u_n) converge vers l, toute sous-suite converge aussi vers l.



Si une suite extraite de (u_n) diverge, ou si deux suites extraites ont des limites différentes, alors (u_n) diverge.

Si des suites extraites de (u_n) convergent toutes vers la même limite l, on peut conclure que (u_n) converge vers l si tout u_n est un terme d'une des suites extraites étudiées. Par exemple, si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers l, alors (u_n) converge vers l.

3. Suites monotones

3.1 Définition

La suite (u_n) est croissante si $u_{n+1} \geqslant u_n$ pour tout n ;

décroissante si $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout n ;

stationnaire si $u_{n+1} = u_n$ pour tout n.

3.2 Convergence

Toute suite de réels croissante et majorée est convergente.

Toute suite de réels décroissante et minorée est convergente.

Si une suite est croissante et non majorée, elle diverge vers $+\infty$.

3.3 Suites adjacentes

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si :

(u_n) est croissante ; (v_n) est décroissante ; $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Si deux suites sont adjacentes, elles convergent et ont la même limite.



Si (u_n) croissante, (v_n) décroissante et $u_n \leqslant v_n$ pour tout n, alors elles convergent vers l_1 et l_2.

Il reste à montrer que $l_1 = l_2$ pour qu'elles soient adjacentes.

4. Suites complexes

Soit $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$. La définition de la convergence de (z_n) vers $l = a + \mathrm{i}b$ est la même que pour les suites réelles, en remplaçant la valeur absolue par le module.

Elle est équivalente à la convergence à la fois de (x_n) vers a et de (y_n) vers b.

Les opérations algébriques sur les limites de suites convergentes sont les mêmes que dans le cas de suites réelles.



Attention, $\leqslant$ n'a aucun sens dans $\mathbb{C}$. N'inventez donc pas de théorèmes relatifs aux relations d'ordre.

Suites particulières

12

1[re] année

1. Suites arithmétiques et géométriques

1.1 Suites arithmétiques

Une suite (u_n) est arithmétique de raison r si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n + r.$$

Terme général : $u_n = u_0 + nr$.

Somme des n premiers termes : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k = n\,\frac{u_0 + u_{n-1}}{2}$.

1.2 Suites géométriques

Une suite (u_n) est géométrique de raison $q \neq 0$ si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = q\,u_n.$$

Terme général : $u_n = u_0\,q^n$.

Somme des n premiers termes : $$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} u_k &= u_0\,\frac{1-q^n}{1-q} \quad \text{si} \quad q \neq 1\\ &= n\,u_0 \qquad\qquad \text{si} \quad q = 1.\end{aligned}$$

La suite (u_n) converge vers 0 si $|q| < 1$. Elle est stationnaire si $q = 1$. Elle diverge dans les autres cas.

1.3 Suites arithmético-géométriques

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = a\,u_n + b.$$

Si $a = 1$, elle est arithmétique de raison b.

Si $a \neq 1$, $v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$ est géométrique de raison a.

2. Suites récurrentes

2.1 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

- Une telle suite est déterminée par une relation du type :

(1) $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0 \quad$ avec $\quad a \neq 0, c \neq 0$

et la connaissance des deux premiers termes u_0 et u_1.

L'ensemble des suites réelles qui vérifient la relation (1) est un espace vectoriel de dimension 2. On en cherche une base par la résolution de l'équation caractéristique :

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad (E).$$

- **Cas a, b, c complexes**

Si $\Delta \neq 0$, (E) a deux racines distinctes r_1 et r_2. Toute suite vérifiant (1) est alors du type :

$$u_n = K_1\, r_1^n + K_2\, r_2^n$$

où K_1 et K_2 sont des constantes que l'on exprime ensuite en fonction de u_0 et u_1.

Si $\Delta = 0$, (E) a une racine double $r_0 = -\dfrac{b}{2a}\cdot$ Toute suite vérifiant (1) est alors du type :

$$u_n = (K_1 + K_2\, n)\, r_0^n.$$

- **Cas a, b, c réels**

Si $\Delta > 0$ ou $\Delta = 0$, la forme des solutions n'est pas modifiée.

Si $\Delta < 0$, (E) a deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $r_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$ que l'on écrit sous forme trigonométrique $r_1 = \rho\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $r_2 = \rho\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$. Toute suite vérifiant (1) est alors du type :

$$u_n = \rho^n (K_1 \cos n\theta + K_2 \sin n\theta) = \rho^n\; A \cos (n\theta - \varphi)\,.$$

2.2 Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

- Pour étudier une telle suite, on détermine d'abord un intervalle I contenant toutes les valeurs de la suite.

- **Limite éventuelle**

Si (u_n) converge vers l et si f est continue en l, alors $f(l) = l$.

- **Cas f croissante**

Si f est croissante sur I, alors la suite (u_n) est monotone.

La comparaison de u_0 et de u_1 permet de savoir si elle est croissante ou décroissante.

- **Cas f décroissante**

Si f est décroissante sur I, alors les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et de sens contraire.



Cherchez à étudier si elles sont adjacentes ou non

Intégrales définies 13

1re année

1. Intégrale d'une fonction en escalier

1.1 Subdivision

On appelle subdivision σ de $[a,b]$, la donnée d'un nombre fini de points $x_0,\ldots,x_n$ tels que $x_0 = a$, $x_n = b$, et $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n$.

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble de toutes les subdivisions de $[a,b]$.

Le pas d'une subdivision $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est le nombre :

$$\max_{0\leqslant i\leqslant n-1} (x_{i+1} - x_i)\,.$$

1.2 Fonction en escalier

Une fonction f, définie sur $[a,b]$, est une fonction en escalier sur $[a,b]$ s'il existe $\sigma \in \mathcal{S}$ telle que f soit constante, et égale à l_i, sur chaque intervalle ouvert $]x_i,x_{i+1}[$.

1.3 Intégrale d'une fonction en escalier

On appelle intégrale de la fonction en escalier f, le nombre :

$$I(f) = \sum_{i=0}^{n-1} l_i\ (x_{i+1} - x_i) \quad \text{noté aussi} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$



Remarquez que le nombre $I(f)$ est en fait une somme d'aires de rectangles et qu'il ne dépend pas de la valeur de f aux points x_i de la subdivision.

2. Intégrale d'une fonction continue par morceaux

2.1 Fonction continue par morceaux

Une fonction f, définie sur $[a,b]$, est continue par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe $\sigma \in \mathcal{S}$ telle que :

- f est continue sur chaque intervalle ouvert $]x_i,x_{i+1}[$;
- f admet en tout point de la subdivision une limite à gauche et une limite à droite finies.

2.2 Approximation par une fonction en escalier

Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$.

Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe φ et ψ, fonctions en escalier sur $[a,b]$, telles que :

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \qquad \text{et} \qquad \psi - \varphi \leqslant \varepsilon\,.$$

2.3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$. Il existe un réel unique I tel que, pour toutes fonctions en escalier sur $[a,b]$ φ et ψ vérifiant $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$, on ait :

$$I(\varphi) \leqslant I \leqslant I(\psi)\,.$$

Ce nombre I s'appelle l'intégrale de f sur $[a,b]$, et se note $I(f)$, ou $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, ou $\int_{[a,b]} f$.

Ce nombre dépend de f, de a, de b, mais pas de la variable d'intégration, notée ici x, qui est une variable muette, ce qui signifie qu'on peut la noter par toute lettre non retenue pour un autre usage.

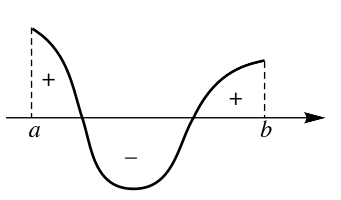
Pour $a < b$, on pose $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$

2.4 Interprétation géométrique

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ correspond à l'aire du domaine du plan situé sous le graphique de f, comptée

– positivement pour la partie située au-dessus de l'axe des abscisses,

– négativement pour la partie située en dessous.



3. Propriétés d'une intégrale

f et g sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues par morceaux sur les intervalles considérés.

3.1 Invariance

L'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ne change pas si l'on modifie la valeur de f sur $[a,b]$ en un nombre fini de points.

3.2 Linéarité

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

$$\forall k \in \mathbb{R} \qquad \int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

3.3 Relation de Chasles

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

3.4 Relation d'ordre

- Si $a < b$, et si $f \leqslant g$ sur $[a,b]$, alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$
- Si f est continue et positive sur $[a,b]$, on a :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \iff \forall x \in [a,b] \quad f(x) = 0\,.$$

3.5 Majoration de l'intégrale

- Valeur absolue :

$$\text{Si } a < b \qquad \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\,.$$

- Si, pour tout $x \in [a,b]$ (avec $a < b$), on a $m \leqslant f(x) \leqslant M$, alors :

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M\,.$$

Le nombre $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est la valeur moyenne de f sur $[a,b]$.

- Inégalité de la moyenne :

$$\text{Si } a < b \quad \left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \times \int_a^b |g(x)|\,\mathrm{d}x\,.$$

En particulier :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant |b-a|\ \sup|f|\,.$$

3.6 Inégalité de Cauchy-Schwarz

L'application : $(f,g) \mapsto \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ définit un produit scalaire (*cf.* fiche 63) sur l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a,b]$.

En particulier, l'inégalité de Cauchy-Schwarz prend la forme :

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \times \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x}\,.$$

3.7 Sommes de Riemann

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Plus généralement, si $(x_0,\ldots,x_n)$ est une subdivision de $[\,a,b\,]$ dont le pas tend vers 0 quand n tend vers l'infini, et c_i un point quelconque de $[\,x_i,x_{i+1}]$ (le plus souvent x_i ou x_{i+1}), on a alors :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\,f(c_i) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

4. Cas d'une fonction à valeurs complexes

Soit $t \mapsto \varphi(t) = f(t) + \mathrm{i}g(t)$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, définie sur $[a,b]$.

φ est continue par morceaux sur $[a,b]$ si, et seulement si, f et g le sont.

L'intégrale de φ sur $[a,b]$ est alors définie par :

$$\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Toutes les propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux, à valeurs réelles, qui ont encore un sens, sont prolongées, soit :

linéarité, relation de Chasles, majoration du module de l'intégrale :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\,.$$



N'oubliez pas qu'il n'y a pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$, ce qui fait que $f \geqslant 0$, ou $f \leqslant g$, n'aurait pas de sens.

Calcul des primitives 14

1re année

1. Primitives d'une fonction continue

1.1 Définition

f étant définie sur un intervalle I, une fonction F, définie sur I, est une primitive de *f*, si elle est dérivable sur I et si

$$\forall x \in I \qquad F'(x) = f(x)\,.$$

1.2 Théorèmes

- Deux primitives de *f* diffèrent d'une constante, c'est-à-dire que, si F est une primitive de *f* sur un intervalle I, toutes les primitives de *f* sur I sont de la forme : $x \mapsto F(x) + C$ où C est une constante quelconque.
- Si *f* est continue sur un intervalle I contenant a, la fonction F définie sur I par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, est une primitive de *f*. C'est l'unique primitive de *f* qui s'annule en a.

  On note $\displaystyle\int f(t)\,\mathrm{d}t$ l'une quelconque des primitives de *f*.
- Pour toute primitive h de *f* sur I, on a :

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \big[h(t)\big]_a^x = h(x) - h(a)\,.$$

  Le calcul d'intégrales de fonctions continues se ramène donc à la recherche de primitives.
- Pour toute fonction *f* de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, on a :

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

2. Méthodes de calcul

2.1 Linéarité

Si F et G sont des primitives respectives de *f* et de g sur I et k un réel, alors, sur I, $F + G$ est une primitive de $f + g$ et kF une primitive de kf.



Pour les fonctions trigonométriques, on linéarise avec les formules de transformation de produits en sommes (*cf.* fiche 9), ou avec les formules d'Euler (*cf.* fiche 47). On utilise en particulier :

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\big(1 + \cos 2x\big) \quad ; \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}\big(1 - \cos 2x\big) \ ;$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}\big(\cos 3x + 3\cos x\big) \quad ; \quad \sin^3 x = \frac{1}{4}\big(3\sin x - \sin 3x\big) \ .$$

2.2 Intégration par parties

Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I, et a et b des réels de I. On a :

$$\int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t = \big[u(t)\,v(t)\big]_a^b - \int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

ce qui s'écrit aussi, en terme de primitives :

$$\int u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t = u(t)\,v(t) - \int u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

2.3 Cas classiques d'utilisation

P étant un polynôme et $\alpha \neq 0$,

- pour $\displaystyle\int_a^b P(t)\sin\,(\alpha t + \beta)\,\mathrm{d}t$, on pose $v(t) = P(t)$ et $u'(t) = \sin(\alpha t + \beta)$;
- pour $\displaystyle\int_a^b P(t)\cos\,(\alpha t + \beta)\,\mathrm{d}t$, on pose $v(t) = P(t)$ et $u'(t) = \cos(\alpha t + \beta)$;
- pour $\displaystyle\int_a^b P(t)\mathrm{e}^{\alpha t + \beta}\,\mathrm{d}t$, on pose $v(t) = P(t)$ et $u'(t) = \mathrm{e}^{\alpha t + \beta}$;
- pour $\displaystyle\int_a^b P(t)\ln t\,\mathrm{d}t$, on pose $v(t) = \ln t$ et $u'(t) = P(t)$.
- Pour calculer $\displaystyle I = \int_a^b \mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle J = \int_a^b \mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t\,\mathrm{d}t$, on peut faire deux intégrations par parties « sans changer d'avis », c'est-à-dire en posant les deux fois $v(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}$, ou les deux fois $v(t) = \cos\beta t$ ou $\sin\beta t$.

Vous pouvez aussi utiliser l'exponentielle complexe :

$$I = \mathrm{Re}\left(\int_a^b \mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t}\ \mathrm{d}t\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t}}{\alpha+\mathrm{i}\beta}\right]_a^b\right) = \cdots$$

2.4 Intégration par changement de variable

Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $[\alpha,\beta]$ dans $[a,b]$, et f une fonction continue sur $[a,b]$. Alors :

$$\int_\alpha^\beta f\big(u(t)\big)\,u'(t)\ \mathrm{d}t = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)\ \mathrm{d}x\,.$$

Si, de plus, u est bijective, on a :

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f\big(u(t)\big)\,u'(t)\ \mathrm{d}t\,.$$



Dans les exercices, le symbole dx se transforme comme une différentielle :

$$x = u(t) \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{d}x = u'(t)\ \mathrm{d}t\,.$$

3. Primitives et fonctions rationnelles

3.1 Primitives d'une fonction rationnelle

- On décompose la fraction rationnelle en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$, c'est-à-dire comme somme de sa partie entière (polynôme dont on connaît les primitives) et de fractions de la forme :

$$\frac{a}{(x-\alpha)^n} \quad \text{et} \quad \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n} \qquad \text{avec} \quad p^2-4q<0.$$

  On peut en calculer des primitives comme suit ($n = 1$ dans le second cas).

- Sur un intervalle ne contenant pas α, on a :

$$\begin{aligned}\int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{(t-\alpha)^n} &= \left[-\frac{1}{n-1}\,\frac{1}{(t-\alpha)^{n-1}}\right]_a^x && \text{si } n \neq 1\\ &= \big[\ln|t-\alpha|\big]_a^x && \text{si } n = 1.\end{aligned}$$

- $\displaystyle\int_a^x \frac{at+b}{t^2+pt+q}\ \mathrm{d}t = \frac{a}{2}\int_a^x \frac{2t+p}{t^2+pt+q}\ \mathrm{d}t + \left(b-\frac{ap}{2}\right)\int_a^x \frac{1}{t^2+pt+q}\ \mathrm{d}t\,.$

La première primitive se calcule en utilisant le changement de variable $u = t^2 + pt + q$.

En écrivant sous forme canonique le trinôme $t^2 + pt + q$, le calcul de la deuxième primitive se ramène, après changement de variable, à :

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \left[\arctan u\right]_{\alpha}^{\beta}.$$

3.2 Primitives de fractions rationnelles en sinus et cosinus

On veut déterminer $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, où f est une fraction rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$.

Dans le cas où $f(x)\,\mathrm{d}x$ est invariant

- lors du changement de x en $-x$, on peut poser $u = \cos x$;
- lors du changement de x en $\pi - x$, on peut poser $u = \sin x$;
- lors du changement de x en $\pi + x$, on peut poser $u = \tan x$.

Sinon, on peut poser $u = \tan \frac{x}{2}$.

Dans tous les cas, on est conduit à un calcul du type $\int g(u)\,\mathrm{d}u$ où g est une fraction rationnelle en u.

Formules de Taylor

15

1re année

1. Formules de Taylor à valeur globale

1.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, x_0 et x des points de I. On a :

$$f(x) = P_n(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t,$$

où $\quad P_n(x) = f(x_0) + \dfrac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \cdots + \dfrac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$

est l'approximation de Taylor à l'ordre n ;

et $\quad R_n(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$ est le reste intégral d'ordre n.

1.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. On suppose de plus qu'il existe $A > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, on ait $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant A$.

On obtient alors la majoration du reste :

$$|R_n(x)| \leqslant A \, \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2. Formule de Taylor-Young

Soit f une fonction dérivable sur I jusqu'à l'ordre n. Alors la fonction ε définie au voisinage de 0 par :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + h^n \varepsilon(h)$$

est telle que $\quad \lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Au lieu de $h^n \varepsilon(h)$, on écrit souvent $o(h^n)$.

16 Développements limités

1re année

1. Généralités

1.1 Définition

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0, s'il existe une fonction polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n, et une fonction ε, définies au voisinage de x_0 telles que :

$$f(x) = P_n(x) + (x - x_0)^n \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

$P_n(x)$ est la partie régulière et $(x - x_0)^n \varepsilon(x)$ le reste.
Dans ce cas, on a des fonctions équivalentes : $f(x) \underset{x_0}{\sim} P_n(x)$.



En posant $x = x_0 + t$, on peut toujours se ramener au voisinage de $t = 0$.

1.2 Propriétés des développements limités

- **Troncature**

Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 dont la partie régulière est $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et si $p \leqslant n$, alors f admet un développement limité d'ordre p au voisinage de 0 dont la partie régulière est $P_p(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k$.

- **Unicité**

Si f possède un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, il est unique.

- **Parité**

Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, de partie régulière $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Si f est paire (resp. impaire), alors les coefficients a_k d'indice impair (resp. pair) sont nuls.

• **Obtention d'un développement limité**

La formule de Taylor-Young permet d'obtenir de nombreux développements limités.



Mais si f admet un développement limité d'ordre n ($n \geqslant 2$) au voisinage de x_0, elle n'admet pas forcément de dérivée seconde en x_0.

1.3 Développements limités de base

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha\frac{x}{1!} + \cdots + \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

avec les cas particuliers :

$$\alpha = \frac{1}{2} \qquad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$\alpha = -1 \qquad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\mathrm{ch}\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{p-1}\frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + o(x^{2p})$$

$$\mathrm{sh}\, x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + o(x^{2p})$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$

$$\mathrm{th}\, x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^p}{2p+1}\, x^{2p+1} + o(x^{2p+2})$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$$

$$\text{argsh}\, x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$$

$$\text{argth}\, x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + o(x^{2p+2})$$

2. Opérations sur les développements limités

Considérons deux fonctions f et g admettant des développements limités de même ordre n au voisinage de 0, de parties régulières respectives A_n et B_n.

2.1 Combinaison linéaire

Si λ et μ sont des réels, alors $\lambda f + \mu g$ admet un développement limité au voisinage de 0 dont la partie régulière est $\lambda A_n + \mu B_n$.

2.2 Produit

fg admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, dont la partie régulière est formée des termes de degré inférieur ou égal à n du produit $A_n\ B_n$.

2.3 Quotient

Si $B_n(0) \neq 0$ (soit $g(0) \neq 0$), $\dfrac{f}{g}$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, dont la partie régulière est obtenue à partir de $A_n(x) \times \dfrac{1}{B_n(x)}$ en utilisant le développement limité de $\dfrac{1}{1+u}$ au voisinage de 0.

2.4 Composition

Si $g \circ f$ est définie au voisinage de 0 et si $f(0) = 0$, alors $g \circ f$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, dont la partie régulière s'obtient en remplaçant u dans $B_n(u)$ par $A_n(x)$ et en ne gardant que les monômes de degré inférieur ou égal à n.

2.5 Primitive

Si f est continue, une primitive F de f admet le développement limité d'ordre $n+1$, au voisinage de 0, obtenu par intégration terme à terme de $A_n(x)$, le terme constant étant $F(0)$.

2.6 Dérivée

Si f admet des dérivées jusqu'à l'ordre n ($n \geqslant 2$) sur un intervalle ouvert I contenant 0, la fonction f' admet un développement limité d'ordre $n-1$ dont la partie régulière s'obtient en dérivant terme à terme celle du développement limité de f.

3. Applications des développements limités

3.1 Étude locale d'une fonction

Pour l'étude locale d'une fonction, ou pour la recherche d'une limite, on cherche un développement limité comportant au moins un terme non nul.



Dans les opérations sur les fonctions, l'ordre des développements limités intermédiaires doit être choisi de façon cohérente. À chaque étape, examinez si le terme suivant aurait eu de l'influence sur votre résultat.

3.2 Étude des branches infinies

Soit f définie sur un intervalle $]A,+\infty[$ ou $]-\infty,A[$. Quand x tend vers l'infini, $X = \dfrac{1}{x}$ tend vers 0, et, en remplaçant x par $\dfrac{1}{X}$ on est ramené au voisinage de 0.

Lorsque x et $f(x)$ tendent vers l'infini, on obtient une asymptote oblique (si elle existe) en effectuant le développement limité au voisinage de l'infini :

$$\frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^k}\right)$$

où $\dfrac{c}{x^k}$ est le premier terme non nul après $\dfrac{b}{x}\cdot$

Dans ce cas, la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de f. Et la position relative de la courbe et de l'asymptote résulte du signe de $\dfrac{c}{x^{k-1}}$ lorsque x tend vers l'infini.

17 Approximation

1[re] année

1. Calcul approché des zéros d'une fonction

1.1 Généralités

- On détermine d'abord un segment I sur lequel l'équation $f(x) = 0$ possède une racine unique r qu'il s'agit d'approcher.
- On peut réduire progressivement l'intervalle où se situe r par dichotomie.
- Mais il est souvent préférable de choisir une fonction g telle que :
  - l'équation $f(x) = 0$ soit équivalente sur I à $g(x) = x$;
  - il existe un intervalle $J \subset I$ contenant r sur lequel g soit contractante et tel que $g(J) \subset J$.

Alors toute suite récurrente définie par :

$$u_0 \in J \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \;\; u_{n+1} = g(u_n)$$

converge vers r.

Si plusieurs fonctions g peuvent convenir, on choisit celle dont le coefficient de contraction est le plus faible pour que la convergence soit plus rapide.

1.2 Méthode de Newton-Raphson

Si f possède une dérivée continue ne s'annulant pas sur I on peut choisir la fonction g définie par :

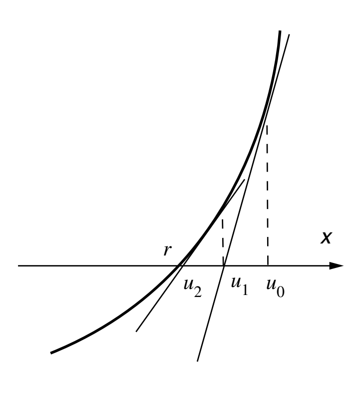
$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Géométriquement, cela signifie :

u_0 étant donné,

u_1 est l'abscisse de l'intersection de la tangente au graphique de f au point $\big(u_0, f(u_0)\big)$ avec l'axe des x ;

u_2 est l'intersection de la tangente au graphique de f au point $\big(u_1, f(u_1)\big)$ avec l'axe des x ...



La convergence de la suite (u_n) est très rapide car

$$g'(x) = \frac{f(x)\, f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

entraîne $g'(r) = 0$.

On peut donc choisir un intervalle J contenant r où le coefficient de contraction de g est aussi petit qu'on veut.

2. Calcul approché d'une intégrale

Le calcul exact de l'intégrale $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est souvent très difficile, sinon impossible. On peut cependant obtenir des valeurs approchées de I par diverses méthodes qui consistent à calculer l'intégrale d'une fonction simple, proche de f.

2.1 Méthode des rectangles

Elle consiste à approcher f par une fonction en escalier. Avec un partage de $[a,b]$ en n segments de même longueur $h = \frac{b-a}{n}$ on obtient la valeur approchée R_n de I :

$$R_n = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \qquad \text{avec} \qquad x_i = a + ih = a + i\,\frac{b-a}{n}\cdot$$

Lorque f possède une dérivée bornée sur $[a,b]$, on a la majoration de l'erreur due à la méthode :

$$|I - R_n| \leqslant M_1 \frac{(b-a)^2}{2n} \qquad \text{où} \qquad M_1 = \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)|\,.$$

Cette majoration permet de déterminer n, après avoir choisi la précision souhaitée. Si f est croissante sur $[a,b]$, R_n est une valeur approchée par défaut. Si f est décroissante, R_n est une valeur approchée par excès.

2.2 Méthode des trapèzes

Elle consiste à approcher le graphique de f par une ligne polygonale. Avec le partage précédent de $[a,b]$, on obtient, en remplaçant les rectangles par des trapèzes, la valeur approchée T_n de I :

$$T_n = h\Big[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\Big] \quad \text{avec} \quad x_i = a + i\,\frac{b-a}{n}\cdot$$

Lorsque f possède une dérivée seconde bornée sur $[a,b]$, on a la majoration de l'erreur due à la méthode :

$$|I - T_n| \leqslant \frac{M_2\,(b-a)^3}{12n^2} \quad \text{où} \quad M_2 = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

Cette majoration permet de déterminer n, après avoir choisi la précision souhaitée.

Si f est convexe sur $[a,b]$, on a $T_n \geqslant I$, et si f est concave sur $[a,b]$, on a $T_n \leqslant I$.

Intégration sur un intervalle quelconque

18

2e année

1. Intégrales généralisées (ou impropres)

1.1 Fonction localement intégrable

Soit f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est localement intégrable sur I si elle est intégrable sur tout segment inclus dans I.

1.2 Cas d'une fonction non bornée sur un intervalle borné

Soit f une fonction localement intégrable sur $]a,b]$ avec $a < b$. Si la limite $\lim\limits_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est divergente.



Si f possède une limite à droite en a, il n'y a aucun problème d'existence pour l'intégrale généralisée.

On définit de manière analogue l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ pour une fonction continue sur $[a,b[$.



Étudier la nature d'une intégrale généralisée (ou impropre), c'est préciser si elle est convergente ou divergente.

1.3 Cas d'une fonction définie sur un intervalle non borné

Soit f une fonction localement intégrable sur $[a,+\infty[$.

Si la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est divergente.

On définit de manière analogue l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^a f(t)\,\mathrm{d}t$ pour une fonction continue sur $]-\infty,a]$.

1.4 Généralisation

- Si f est localement intégrable sur $]a,b[$, on pose

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ avec } c \in]a,b[\text{ quelconque}$$

et on dit que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, les deux intégrales du second membre convergent.

- Si f est localement intégrable sur $]a,+\infty[$, on pose

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ avec } b \in]a,+\infty[\text{ quelconque}$$

et on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, les deux intégrales du second membre convergent.

- Si f est localement intégrable sur $]-\infty,+\infty[$, on pose

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ avec } b \in]-\infty,+\infty[\text{ quelconque}$$

et on dit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, les deux intégrales du second membre convergent.

2. Règles de convergence

2.1 Condition nécessaire de convergence sur $[a,+\infty[$

Soit f une fonction localement intégrable sur $[a,+\infty[$. Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et si $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe, cette limite est nécessairement nulle.


Si f n'a pas de limite, on ne peut rien dire de l'intégrale.

2.2 Comparaison de fonctions positives

Soit f et g localement intégrables et telles que $0 \leqslant f \leqslant g$ sur $[a,+\infty[$.

Si $\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge aussi.

Si $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge aussi.

2.3 Équivalence de fonctions positives

Soit f et g deux fonctions positives.

Si $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$, alors les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$, alors les intégrales $\int_a^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^{b} g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature, c'est-à-dire qu'elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.



Il est important que f et g soient de même signe au voisinage du problème étudié, sinon les fonctions peuvent être équivalentes et leurs intégrales de nature différente.

2.4 Situations de référence

Pour $a > 0$, on a : $\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge $\iff \alpha > 1$.

Pour $a > 0$, on a : $\int_0^{a} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge $\iff \alpha < 1$.

$\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ (où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$) sont convergentes.

2.5 Intégrales absolument convergentes

- **Définition**

Soit f une fonction localement intégrable sur $[a,+\infty[$. On dit que f est absolument convergente sur cet intervalle si $\int_a^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

- **Théorème**

$$\int_a^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t \text{ converge} \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

Si f est localement intégrable sur $]a,b]$, on a une définition et un théorème analogue.

3. Fonction intégrable sur un intervalle quelconque

3.1 Définitions

- Une fonction f, continue par morceaux sur un intervalle I est dite intégrable sur I si elle vérifie l'une des deux conditions équivalentes suivantes :
  – la fonction f admet sur I une intégrale absolument convergente ;
  – il existe un réel $M > 0$ tel que, pour tout segment J inclus dans I, on ait :

$$\int_J |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant M\,.$$

- Si f est intégrable sur I, on appelle intégrale de f sur I, et on note $\int_I f$:
  – l'intégrale de f sur I si I est un segment,
  – son intégrale impropre sur I si I n'est pas un segment.

3.2 Propriétés

- Les propriétés, vues dans le cadre de l'intégrale sur un segment, comme la linéarité et l'inégalité de la moyenne se prolongent.
- La relation de Chasles devient :

Si f est intégrable sur I et sur J, si $I \cup J$ est un intervalle et si $I \cap J$ est vide ou réduit à un point, on a :

$$\int_I f + \int_J f = \int_{I\cup J} f.$$

- Dans le cas des fonctions à valeurs réelles, on a :

Si f est intégrable et $f \geqslant 0$, alors $\int_I f \geqslant 0$.

Si f et g sont intégrables et $f \leqslant g$, alors $\int_I f \leqslant \int_I g$.

Si f est continue et positive :

$$\int_I f = 0 \iff \forall t \in I \quad f(t) = 0\,.$$

3.3 Théorème de convergence dominée PC-PSI

Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes, continues par morceaux sur I.

Si (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I, et s'il existe une fonction φ continue par morceaux sur I, positive et intégrable sur I, telle que pour tout entier n, on ait $|f_n| \leqslant \varphi$ (hypothèse de domination), alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et

$$\int_I f = \lim_n \int_I f_n .$$

3.4 Intégration terme à terme d'une série de fonctions PC-PSI

Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes, continues par morceaux et intégrables sur I, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et telle que la série $\sum \int_I |f_n|$ converge.

Alors f est intégrable sur I et

$$\int_I f = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n .$$

19 Généralités sur les équations différentielles

1re année

1. Équations différentielles

Une équation différentielle est une relation entre une variable réelle t et les valeurs $x(t),x'(t),\ldots,x^{(n)}(t)$ d'une fonction inconnue et de certaines de ses dérivées, de la forme :

$$F\big(t,x(t),x'(t),\ldots,x^{(n)}(t)\big)=0 \qquad (E)$$

où F est une fonction continue.

L'ordre n de l'équation différentielle est celui de la dérivée d'ordre le plus élevé qui figure dans (E).

Si x est à valeurs dans $\mathbb{R}$, l'équation (E) est dite scalaire.

Si x est à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, l'équation (E) est dite vectorielle.

On appelle solution de (E) sur I, ou intégrale de (E) sur I, toute fonction définie sur un intervalle ouvert I possédant des dérivées jusqu'à l'ordre n et telle que :

$$\forall t\in I \qquad F\big(t,x(t),x'(t),\ldots,x^{(n)}(t)\big)=0\,.$$

Résoudre (E) dans I, c'est rechercher l'ensemble de ses solutions dans I.

La courbe représentant une solution de (E) est aussi appelée courbe intégrale de (E).

Une solution x est dite maximale lorsqu'il n'existe pas de solution coïncidant avec x sur I et définie sur un intervalle strictement plus grand.

Le problème de Cauchy est la recherche des solutions d'une équation différentielle vérifiant des conditions initiales imposées.

2. Théorème de Cauchy-Lipschitz

Considérons une équation différentielle du premier ordre sous la forme :

$$x' = f(t,x) \qquad (E)$$

avec f définie et continue sur $I \times U$ où I est un intervalle ouvert et U un ouvert de $\mathbb{R}^p$. On suppose que les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial f}{\partial x_p}$ sont continues sur $I \times U$.

Alors, pour tout $(t_0, x_0) \in I \times U$, il existe une solution maximale, et une seule, du problème de Cauchy associé.

Toute solution de (E) est une restriction de cette solution.

20 Équations différentielles linéaires

1re année et 2e année

1. Équations différentielles scalaires linéaires

1.1 Définitions

- Dans le cas du premier ordre, elles sont de la forme :

$$a(t)\,x'(t) + b(t)\,x(t) = f(t) \qquad \textbf{(1)}$$

où a, b et f sont des fonctions données, continues sur un intervalle I, à valeurs réelles ou complexes.

Pour la résolution, on se place sur un intervalle $J \subset I$ tel que a ne s'annule pas sur J.

- Dans le cas du second ordre, elles sont de la forme :

$$a(t)x''(t) + b(t)\,x'(t) + c(t)\,x(t) = f(t) \qquad \textbf{(1)}$$

où a, b, c et f sont des fonctions données, continues sur un intervalle I.

Pour la résolution, on se place sur un intervalle $J \subset I$ tel que a ne s'annule pas sur J.

L'équation est dite à coefficients constants si elle est de la forme :

$$a\,x''(t) + b\,x'(t) + c\,x(t) = f(t) \qquad \textbf{(1)}$$

où a, b et c sont des constantes données, réelles ou complexes, avec $a \neq 0$.

1.2 Théorèmes dus à la linéarité

- Toute solution de **(1)** est de la forme $x_P(t) + x_S(t)$ où $x_P(t)$ est une solution particulière de **(1)** et $x_S(t)$ la solution générale de l'équation homogène associée :

$$a(t)\,x'(t) + b(t)\,x(t) = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

ou

$$a(t)x''(t) + b(t)\,x'(t) + c(t)\,x(t) = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

- Les solutions complexes de **(2)** sur J forment un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1 pour le premier ordre, 2 pour le second ordre.

Si a, b et c sont à valeurs réelles, l'ensemble des solutions réelles de **(2)** sur J est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1 pour le premier ordre, 2 pour le second ordre.

2. Résolution dans le cas du premier ordre

2.1 Résolution de l'équation homogène associée

Ses solutions sont du type :

$$x_S(t) = K\,\mathrm{e}^{-A(t)} \quad \text{où} \quad A(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{b(u)}{a(u)}\mathrm{d}u$$

avec K constante arbitraire et t_0 élément quelconque de I.

2.2 Recherche d'une solution particulière (méthode de Lagrange)

x_1 étant une solution non nulle de **(2)**, on introduit une fonction auxiliaire inconnue $K(t)$ telle que $x(t) = K(t)\,x_1(t)$ soit solution de **(1)**.

Ceci conduit à $K'(t) = \dfrac{f(t)}{a(t)x_1(t)}$ ce qui permet de calculer $K(t)$ puis $x(t)$.

Cette méthode s'appelle aussi méthode de variation de la constante.

3. Résolution dans le cas du second ordre

3.1 Résolution de l'équation homogène dans le cas de coefficients constants

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{rt}$ est solution de **(2)** si, et seulement si, r vérifie l'équation caractéristique :

$$ar^2 + br + c = 0,$$

ce qui conduit à calculer $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique a deux racines distinctes r_1 et r_2. On a alors :

$$x_S(t) = K_1\,\mathrm{e}^{r_1 t} + K_2\,\mathrm{e}^{r_2 t},$$

où K_1 et K_2 sont des constantes quelconques.

- Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique a une racine double r_0. On a alors :

$$x_S(t) = (K_1\,t + K_2)\,\mathrm{e}^{r_0 t},$$

où K_1 et K_2 sont des constantes quelconques.

- Si a et b sont réels et si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm \mathrm{i}\beta$. On a alors :

$$x_S(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\,(K_1 \cos \beta t + K_2 \sin \beta t)\,,$$

où K_1 et K_2 sont des constantes réelles quelconques.



En physique, on utilise la forme :

$$K_1 \cos \beta t + K_2 \sin \beta t = A \cos (\beta t - \varphi)$$

avec $A = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}$, $\cos \varphi = \dfrac{K_1}{A}$ et $\sin \varphi = \dfrac{K_2}{A}\cdot$

3.2 Résolution de (1) à coefficients constants dans quelques cas

- Cas où $f(t)$ est un polynôme $P(t)$ de degré n

Il existe une solution particulière de **(1)** sous la forme d'un polynôme de degré

n si $c \neq 0$;

$n+1$ si $c = 0$ et $b \neq 0$;

$n+2$ si $c = b = 0$ et $a \neq 0$.

La recherche de cette solution se fait par identification.

- Cas où $f(t) = \mathrm{e}^{kt}\,P(t)$ avec P polynôme et k constante

On effectue le changement de fonction inconnue

$$x(t) = \mathrm{e}^{kt}\,z(t)$$

où z est une nouvelle fonction inconnue. En reportant x, x' et x'' dans **(1)**, on est conduit à une équation en z du type précédent.

- Cas où $f(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\,\cos \beta t\; P(t)$ ou $f(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\,\sin \beta t\; P(t)$ avec α et β réels, et P polynôme à coefficients réels

Une solution particulière est la partie réelle, ou la partie imaginaire, de la solution particulière obtenue pour l'équation de second membre $\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)\,t}\,P(t)$.

2.3 Méthodes générales de résolution de l'équation complète (1)

- **Variation de la constante**

Si x_1 est une solution de **(2)**, ne s'annulant pas sur I, on peut chercher les solutions de **(1)** sous la forme :

$$x(t) = u(t)\, x_1(t)$$

où u est une fonction inconnue qui vérifie l'équation différentielle linéaire du premier ordre en u' obtenue en reportant dans **(1)**.

- **Système fondamental de solutions**

Si x_1 et x_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de **(2)**, on peut chercher la solution de **(1)** sous la forme :

$$x(t) = u(t)\, x_1(t) + v(t)\, x_2(t)$$

où u et v sont des fonctions inconnues soumises à la condition :

$$u'(t)\, x_1(t) + v'(t)\, x_2(t) = 0\,.$$

Les fonctions u et v sont obtenues en résolvant le système :

$$\begin{cases} u'\, x_1 + v'\, x_2 = 0 \\ u'\, x_1' + v'\, x_2' = f \end{cases}$$

dont le déterminant

$$w(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}$$

appelé wronskien de x_1 et x_2, ne s'annule pas sur I lorque x_1 et x_2 sont linéairement indépendantes. On obtient :

$$u'(t) = -\frac{x_2(t)\, f(t)}{w(t)} \qquad \text{et} \qquad v'(t) = \frac{x_1(t)\, f(t)}{w(t)}\cdot$$

- **Utilisation de séries entières**

On peut chercher des solutions sous la forme d'un développement en série entière.



Cette méthode peut être envisagée quand $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$ sont des polynômes simples. N'oubliez pas de vérifier que la (ou les) série entière obtenue a un rayon de convergence non nul.

21 Systèmes différentiels linéaires

2e année

1. Systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants

1.1 Définitions et notations

Un système de p équations différentielles linéaires du premier ordre et à coefficients constants est de la forme :

$$(S)\quad \begin{cases} x_1'(t) &= a_{11}\,x_1(t) + \cdots + a_{1p}\,x_p(t) + b_1(t) \\ & \vdots \\ x_p'(t) &= a_{p1}\,x_1(t) + \cdots + a_{pp}\,x_p(t) + b_p(t) \end{cases}$$

où les b_i sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.



On suppose que le nombre d'inconnues est égal à celui des équations.

Avec

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_p(t) \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} \end{pmatrix} \quad B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_p(t) \end{pmatrix}$$

(S) s'écrit sous la forme matricielle :

$$X'(t) = A\,X(t) + B(t).$$

Si $B(t) = 0$, le système est dit homogène.

1.2 Structure des solutions

L'ensemble des solutions du système différentiel linéaire homogène

$$X'(t) = A\,X(t) \qquad (S')$$

est un espace vectoriel de dimension p.

Toute solution de (S) est la somme de la solution générale de (S') et d'une solution particulière de (S).

1.3 Cas où A est diagonalisable

Soit A diagonalisable ; notons $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ ses valeurs propres et $V_1,\ldots,V_p$ une base de $\mathbb{R}^p$ de vecteurs propres associés.

L'espace vectoriel des solutions du système homogène (S') admet pour base :

$$\left(V_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t},\ldots,V_p\,\mathrm{e}^{\lambda_p t}\right).$$

2. Résolution de (S)

2.1 Par réduction de A

On a $A = PRP^{-1}$ où R est diagonale ou triangulaire. Si l'on pose $Y(t) = P^{-1}X(t)$ et $C(t) = P^{-1}B(t)$, le système s'écrit :

$$Y'(t) = RY(t) + C(t).$$

On résout ce système réduit et on en déduit $X(t) = PY(t)$.



Si $B(t) \neq 0$, cette méthode nécessite le calcul de P^{-1} et peut être pénible.

2.2 Par la méthode de « variation des constantes »

Si $\big(C_1(t),\ldots,C_p(t)\big)$ est une base de l'espace vectoriel des solutions de (S'), on peut poser $X(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} u_i(t)\,C_i(t)$ où les u_i sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}$.

2.3 Par la recherche d'intégrales premières indépendantes

Si λ est une valeur propre de A, comme $\det(A-\lambda I_p) = 0$, il existe une combinaison linéaire, à coefficients non tous nuls, des lignes L_i de la matrice $A - \lambda I_p$ telle que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i\,L_i = 0$.

En utilisant cette combinaison linéaire à partir des lignes de

$$X' - \lambda X = (A-\lambda I_p)X + B$$

on obtient une équation différentielle ordinaire qui donne $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i\,x_i$.

Si A est diagonalisable, on obtient ainsi p combinaisons linéaires en x_i, d'où l'on déduit les x_i.

22 Notions sur les équations différentielles non linéaires

1re année et 2e année

1. Équations du premier ordre à variables séparables

Lorsque l'équation est de la forme :

$$f\big(x(t)\big)\,x'(t) = g(t),$$

où f et g sont des fonctions données dont on connaît des primitives F et G, on a :

$$F\big(x(t)\big) = G(t) + C,$$

et si F possède une fonction réciproque F^{-1}, on en tire :

$$x(t) = F^{-1}\big(G(t) + C\big),$$

relation qui donne toutes les solutions de l'équation.
Cette solution générale dépend de la constante d'intégration C.
Dans le cas du problème de Cauchy, C est déterminé par $x(t_0) = x_0$.



En pratique, on peut écrire l'équation sous la forme :

$$f(x)\ \mathrm{d}x = g(t)\ \mathrm{d}t,$$

puis intégrer formellement les deux membres :

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = \int g(t)\ \mathrm{d}t,$$

et exprimer x en fonction de t.

2. Système autonome de deux équations du premier ordre

Il s'agit d'un système du type :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi(x,y) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \psi(x,y) \end{cases}$$

où φ et ψ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$.

Le problème de Cauchy a une solution maximale unique qui peut s'obtenir comme ligne de niveau d'une fonction de deux variables $f(x,y)$.

En un point régulier, les vecteurs $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ et $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

Il est parfois possible de trouver un facteur intégrant $k(x,y)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = k(x,y)\ y'(t) = k(x,y)\ \psi(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -k(x,y)\ x'(t) = -k(x,y)\ \varphi(x,y) \end{cases}$$

On obtient f par intégration, ce qui permet d'obtenir les trajectoires, mais pas les fonctions du temps.



N'oubliez pas d'éliminer les points singuliers $x'(t) = y'(t) = 0$.

23 Séries numériques

2e année

1. Séries à termes réels ou complexes

1.1 Définitions

Soit (u_n) une suite de nombres réels ou complexes. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

On dit que la série de terme général u_n est convergente lorsque la suite (S_n) est convergente vers S. Sinon, on dit qu'elle est divergente.

Dans le cas d'une série convergente, on note $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

On dit que S est la somme de la série, que S_n est la somme partielle d'ordre n et que $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est le reste d'ordre n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S = S_n + R_n$ et il est équivalent de dire que la série $\sum u_n$ converge ou que $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$.

1.2 Condition nécessaire de convergence

Si la série $\sum u_n$ converge, alors le terme général u_n tend vers 0.



Si le terme général u_n ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge.

1.3 Espace vectoriel des séries convergentes

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent et ont pour sommes respectives U et V alors, pour tous nombres a et b, la série $\sum (au_n + bv_n)$ est convergente et a pour somme $aU + bV$.

1.4 Cas des séries complexes

Soit $u_n = a_n + \mathrm{i}b_n$ avec $a_n \in \mathbb{R}$ et $b_n \in \mathbb{R}$. La série complexe $\sum u_n$ converge si, et seulement si, les deux séries réelles $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent, et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n .$$

1.5 Critère de Cauchy PSI

La série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, la suite (S_n) est de Cauchy (*cf.* fiche.26), c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n > N \qquad \forall p \in \mathbb{N} \qquad \Big| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \Big| < \varepsilon .$$

2. Séries à termes positifs

2.1 Caractérisation

Pour qu'une série de termes réels positifs converge, il faut et il suffit que la suite des sommes partielles soit majorée.

2.2 Comparaison de deux séries

- **Théorème de comparaison**

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries telles que $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

- **Utilisation d'équivalents**

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes > 0 telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

Les deux séries sont alors de même nature, c'est-à-dire qu'elles sont convergentes ou divergentes en même temps.



Ce théorème s'applique aussi à des séries à termes < 0, mais il n'est pas vrai pour des séries quelconques.

- **Règle de Riemann**

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

Si $n^\alpha u_n$ est majoré avec $\alpha > 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Si $n^\alpha u_n$ est minoré par $A > 0$ avec $\alpha \leqslant 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

- **Règle de d'Alembert**

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ admette une limite l quand n tend vers $+\infty$.
Si $l < 1$, la série converge ; si $l > 1$, la série diverge.

2.3 Comparaison d'une série à une intégrale

Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue, positive et décroissante.

La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ et l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ sont de même nature.

3. Convergence absolue

3.1 Définition et théorème

- **Définition**

Si $\sum |u_n|$ converge, on dit que $\sum u_n$ est absolument convergente.

- **Théorème**

Si une série est absolument convergente, alors elle est convergente et sa somme vérifie :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|\,.$$



La réciproque est fausse.

Une série convergente qui n'est pas absolument convergente est dite semi-convergente.

3.2 Produit de deux séries PSI

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries absolument convergentes. Le produit des deux séries est la série de terme général :

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0 = \sum_{p+q=n} u_p v_q\,.$$

Cette série est absolument convergente et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\Big).$$

4. Séries de référence

4.1 Séries géométriques

La série de terme général (réel ou complexe) $u_n = aq^n$ est convergente (absolument) si, et seulement si, $|q| < 1$ et on a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} aq^n = a\,\frac{1}{1-q}.$$

4.2 Séries de Riemann

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1.$$

En particulier, la série divergente $\sum \frac{1}{n}$ est appelée *série harmonique*.

4.3 Série exponentielle

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série de terme général $\frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z.$$

5. Séries alternées

5.1 Définition

Une série $\sum u_n$ à termes réels est alternée si son terme général change de signe alternativement.

En supposant $u_0 \geqslant 0$, on a donc $u_n = (-1)^n a_n$ où $a_n = |u_n|$.

5.2 Critère spécial des séries alternées

• **Théorème**

Si la suite de termes positifs (a_n) est décroissante et converge vers 0, alors la série alternée $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ est convergente.

• **Exemple**

La série harmonique alternée $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente, mais n'est pas absolument convergente.

• **Majoration du reste**

Dans les hypothèses du critère spécial des séries alternées, les suites $\left(S_{2n}\right)$ et $\left(S_{2n+1}\right)$ sont adjacentes.

Le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k a_k$ est du signe de $(-1)^{n+1}$ et vérifie :

$$|R_n| \leqslant a_{n+1}\,.$$

Partie 2

Analyse dans $\mathbb{R}^n$

24 Espaces vectoriels normés

2e année

Toute cette fiche est hors du programme de PT

1. Normes et distances

1.1 Normes

- **Définition**

Soit E un espace vectoriel sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une norme sur E est une application N de E dans $\mathbb{R}$ qui vérifie :

$$(1)\ \forall x \in E \qquad N(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad N(x) = 0 \implies x = 0\ ;$$

$$(2)\ \forall \lambda \in K \quad \forall x \in E \qquad N(\lambda x) = |\lambda|\ N(x)\ ;$$

$$(3)\ \forall x \in E \quad \forall y \in E \qquad N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)\,.$$

Le couple (E,N) est appelé espace vectoriel normé. On écrit souvent $N(x) = \|x\|$.

- **Exemples**

a) $E = K^n$; pour $x = (x_1,\ldots,x_n) \in E$, on définit :

$$\begin{aligned} N_1(x) &= |x_1| + \cdots + |x_n| \\ N_2(x) &= \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2} \\ N_\infty(x) &= \sup\{|x_1|,\ldots,|x_n|\} \end{aligned}$$

b) $E = \mathcal{C}([a,b],K)$ étant l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a,b]$ et à valeurs dans K, pour $f \in E$ on pose :

$$N_1(f) = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t\ ;\ N_2(f) = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t}\,.$$

N_1 est la norme de la convergence en moyenne, N_2 la norme de la convergence en moyenne quadratique.

c) $E = \mathcal{B}(A,F)$ étant l'espace vectoriel des fonctions bornées définies sur un ensemble A et à valeurs dans un espace vectoriel normé F, on pose :

$$N_\infty(f) = \sup_{t \in A} \|f(t)\|$$

où $\|\ \|$ désigne la norme dans F.

N_∞ est la norme de la convergence uniforme.

d) E étant muni d'un produit scalaire, $N(x) = \sqrt{(x|x)}$ définit une norme appelée norme euclidienne si $K = \mathbb{R}$ et hermitienne si $K = \mathbb{C}$. Les normes N_2 des exemples **a)** et **b)** sont des normes euclidiennes ou hermitiennes.

e) Si $(E_1,N_1),\ldots,(E_p,N_p)$ sont des espaces vectoriels normés, on définit une norme sur le produit cartésien $E_1 \times \cdots \times E_p$ en posant :

$$N(u_1,\ldots,u_p) = \sup_{1\leqslant i\leqslant p} N_i(u_i).$$

1.2 Distance associée à une norme

• La distance entre deux éléments x et y de E est :

$$d\,(x,y) = \|y - x\|.$$

• **Propriétés**

$\forall x \in E \quad \forall y \in E \qquad d\,(x,y) \geqslant 0$

$\forall x \in E \quad \forall y \in E \qquad d\,(x,y) = 0 \iff x = y$

$\forall x \in E \quad \forall y \in E \qquad d\,(x,y) = d\,(y,x)$

$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \forall z \in E \qquad d\,(x,z) \leqslant d\,(x,y) + d\,(y,z)$

• La distance entre deux parties A et B non vides de E est :

$$d\,(A,B) = \inf\{d\,(x,y)\ ;\ x \in A\ ,y \in B\}.$$

• Le diamètre d'une partie non vide A est :

$$\text{diam}\ A = \sup\{d\,(x,y)\ ;\ x \in A\ ,y \in A\}.$$

Si diam A est fini, A est dite bornée.

Une application f définie sur un ensemble D et à valeurs dans E est dite bornée si $f(D)$ est une partie bornée de E.

1.3 Boules

La boule ouverte de centre a et de rayon $r > 0$ est :

$$B(a,r) = \{x \in E\ ;\ \|x - a\| < r\}.$$

La boule fermée de centre a et de rayon $r > 0$ est :

$$B^*(a,r) = \{x \in E\ ;\ \|x - a\| \leqslant r\}.$$

2. Suites d'éléments

2.1 Convergence

La définition est analogue au cas des suites dans $\mathbb{R}$.

La suite (u_n) est convergente vers l si :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists n_0 \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geqslant n_0 \qquad \|u_n - l\| \leqslant \varepsilon\,.$$

Une suite qui n'est pas convergente est divergente.

Beaucoup de théorèmes sur les suites numériques se généralisent : unicité de la limite, opérations algébriques, théorème de Bolzano-Weierstrass…



Ne généralisez pas les notions qui utilisent la relation $\leqslant$ comme : limites infinies, suites monotones, théorème d'encadrement.

2.2 Normes équivalentes

Soit N et N' deux normes sur E. On dit qu'elles sont équivalentes si toute suite qui converge vers l pour une norme, converge aussi vers l pour l'autre norme.

Pour ceci, il faut, et il suffit, qu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que :

$$\forall x \in E \qquad \alpha\, N'(x) \leqslant N(x) \leqslant \beta\, N'(x)\,.$$



Pour montrer que N et N' sont équivalentes, montrez que les fonctions $\dfrac{N'}{N}$ et $\dfrac{N}{N'}$ sont bornées sur $E \setminus \{0\}$.

Pour montrer qu'elles ne sont pas équivalentes, montrez que l'un de ces quotients n'est pas borné.

2.3 Cas d'un espace vectoriel de dimension finie

Dans un espace vectoriel de dimension finie, deux normes quelconques sont toujours équivalentes.

3. Topologie d'un espace vectoriel normé (E,N)

3.1 Voisinages d'un point

Une partie V est un voisinage de $a \in E$ s'il existe une boule ouverte centrée en a et incluse dans V.

3.2 Ouverts de E

Une partie A de E est ouverte (ou est un ouvert) si elle est au voisinage de chacun de ses points, ce qui s'écrit :

$$\forall a \in A \qquad \exists r_a > 0 \qquad B(a,r_a) \subset A.$$



Deux normes équivalentes définissent les mêmes ouverts.

Un point a est un point intérieur de A si A est un voisinage de a.

L'ensemble des points intérieurs de A est l'intérieur $\overset{\circ}{A}$ de A. On a $\overset{\circ}{A} \subset A$.

Une partie A est ouverte si, et seulement si, $A = \overset{\circ}{A}$.

3.3 Fermés de E

Une partie A est fermée (ou est un fermé) si son complémentaire est un ouvert.

a est un point adhérent à A si toute boule $B(a,r)$ avec $r > 0$ contient un point de A. L'ensemble des points adhérents à A est l'adhérence $\overline{A}$ de A. On a $A \subset \overline{A}$.

Si $\overline{A} = E$, on dit que A est dense dans E.

Une partie A est fermée si, et seulement si, $A = \overline{A}$.

Une partie A est fermée si, et seulement si, pour toute suite d'éléments de A qui converge dans E, la limite appartient à A.



Fournir une suite d'éléments de A qui converge dans E vers une limite qui n'appartient pas à A, c'est donc démontrer que A n'est pas fermée.

3.4 Frontière

La frontière d'une partie A est l'ensemble $\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

C'est l'ensemble des points a tels que toute boule $B(a,r)$ avec $r > 0$ contient au moins un vecteur de A et un vecteur qui n'appartient pas à A.

3.5 Point isolé

Un point a de A est isolé si l'on peut trouver une boule de centre a ne contenant pas d'autre point de A autre que a.

25 Continuité

2e année

Toute cette fiche est hors du programme de PT

1. Fonctions continues

1.1 Limite

Soit E et F deux espaces vectoriels normés, f une application de $D \subset E$ dans F, a un point adhérent à D et $l \in F$.

f admet la limite l au point a si :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \eta > 0 \qquad \forall x \in D \qquad \|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(x) - l\| \leqslant \varepsilon\,.$$



Les normes dans E et dans F sont notées de la même façon pour ne pas alourdir les notations.

1.2 Continuité

f est continue en a si elle est définie en a et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

f est continue sur $D \subset E$ si elle est continue en tout point de D.

Les opérations algébriques sont analogues au cas particulier des fonctions numériques continues.

Deux fonctions continues de D dans F qui coïncident sur une partie dense de D sont égales.

1.3 Caractérisations de la continuité

- **Caractérisation séquentielle**

Pour que f soit continue en a, il faut, et il suffit, que, pour toute suite (u_n) qui converge vers a, la suite $\big(f(u_n)\big)$ converge vers $f(a)$.

- **Caractérisation topologique**

f est continue sur D si, et seulement si, l'image réciproque de tout ouvert (resp. fermé) de F est un ouvert (resp. fermé) de E.



Attention, si f est continue et si D est un ouvert (resp. fermé) de E, on ne peut rien dire de l'image directe $f(D)$.

1.4 Homéomorphisme

f est un homéomorphisme si elle est bijective et si f et f^{-1} sont toutes les deux continues.

1.5 Fonctions lipschitziennes

Une fonction f de D dans F est lipschitzienne de rapport $k \geqslant 0$ si :

$$\forall x \in D \quad \forall y \in D \qquad \|f(y) - f(x)\| \leqslant k \, \|y - x\|$$

Si $0 < k < 1$, on dit que f est contractante.

2. Applications linéaires continues

2.1 Cas d'un espace de dimension finie

Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue.

Si E, F, G sont de dimensions finies, toute application bilinéaire de $E \times F$ dans G est continue.

2.2 Cas général PSI

- **Critère de continuité**

Si f est linéaire de E dans F, les propositions suivantes sont équivalentes :

– f est continue sur E ;

– f est continue en 0 ;

– f est uniformément continue ;

– $\exists k \geqslant 0 \quad \forall x \in E \quad \|f(x)\| \leqslant k \, \|x\|$.



Vérifiez bien que f est linéaire avant d'appliquer ce critère de continuité.

- **Espace des fonctions linéaires continues**

L'ensemble des fonctions linéaires et continues de E dans F est un espace vectoriel. On le note $\mathcal{L}_c(E,F)$.

2.3 Norme subordonnée PSI

- **Norme d'une application linéaire continue**

En posant :

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|f(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$$

on définit une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$, dite norme subordonnée aux normes choisies dans E et dans F.

- **Norme d'une composée**

Si $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}_c(F,G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}_c(E,G)$ et :

$$\|g \circ f\| \leqslant \|g\| \, \|f\|.$$



Cette propriété, vraie pour une norme subordonnée, n'est pas vérifiée pour une norme quelconque.

3. Compacité

3.1 Cas d'un espace de dimension finie

Dans un espace normé de dimension finie, un compact est une partie fermée et bornée.

3.2 Fonction continue sur un compact

Soit f une fonction continue de E dans F et A un compact de E.

- $f(A)$ est un compact de F.
- f est uniformément continue sur A (théorème de Heine).

Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$

26

1re année

1. Fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$

1.1 Fonctions partielles

Une fonction f, de $D \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, est de la forme :

$$(x_1,\ldots,x_n) \mapsto f(x_1,\ldots,x_n).$$

Si $a = (a_1,\ldots,a_n)$ est un point intérieur de D, les fonctions

$$x_i \mapsto f(a_1,\ldots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\ldots,a_n)$$

définies sur un intervalle ouvert contenant a_i sont les fonctions partielles associées à f au point a.

Une fonction partielle est une restriction à une droite parallèle à un axe.

Pour que f soit continue en a, il est nécessaire que les fonctions partielles soient continues en a_i. Mais ce n'est pas suffisant.



Plus généralement, pour montrer que f n'est pas continue en a, il suffit de montrer que la restriction de f à une courbe continue passant par a n'est pas continue.

Attention, même si la restriction de f à toute droite passant par a est continue, cela ne prouve rien.

1.2 Fonctions coordonnées

On a $f(x) = \big(f_1(x),\ldots,f_p(x)\big)$. Les fonctions, de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto f_j(x)$ sont les fonctions coordonnées de f.

f est continue en a si, et seulement si, toutes ses fonctions coordonnées sont continues en a.

1.3 Représentations graphiques (cas $p = 1$)

Si $n = 2$, l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{\big(x,y,f(x,y)\big)\ ;\ (x,y) \in D\}$$

est la surface représentative de f.



C'est l'analogue de la courbe représentative d'une fonction à une variable.

Si $k \in \mathbb{R}$, l'ensemble

$$\{(x_1,\ldots,x_n) \in D \ ; \ f(x_1,\ldots,x_n) = k\}$$

est la ligne de niveau k de la fonction f.

Si $n = 2$, c'est une courbe plane ; si $n = 3$, c'est une surface.



Si (x_1,x_2) représente un point sur une carte et si $f(x_1,x_2)$ désigne son altitude, les lignes de niveau sont les courbes de même altitude qu'on trouve sur les cartes d'état-major.

2. Dérivées partielles (cas $p = 1$)

Soit f une fonction numérique définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^n$.

2.1 Dérivées partielles d'ordre 1

• **Définition**

Les dérivées partielles de f en $a = (a_1,\ldots,a_n)$ sont les dérivées des fonctions partielles associées à f. On les note :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \quad \text{ou} \quad D_i f(a) \quad \text{ou} \quad f'_{x_i}(a).$$

• **Fonction de classe $\mathcal{C}^1$**

Si toutes les fonctions dérivées partielles :

$$(x_1,\ldots,x_n) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_n)$$

sont continues sur D, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D, ou que f est continûment différentiable sur D.



Dans le cas général, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D si ses p fonctions coordonnées f_j sont toutes de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

- **Vecteur gradient**

Le gradient de f en a est le vecteur dont les composantes sont les dérivées partielles premières :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\ \overrightarrow{e_i}\ .$$

Il est orthogonal à la ligne de niveau de f passant par a.

2.2 Dérivées partielles d'ordre supérieur

- **Définition**

Si les fonctions dérivées partielles admettent elles-mêmes des dérivées partielles en a, ces dérivées sont appelées dérivées partielles secondes, ou dérivées partielles d'ordre 2, de f en a. On les note :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a) \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a)\,.$$

Les dérivées partielles d'ordre supérieur à 2 se définissent par récurrence de façon analogue.

- **Fonction de classe $\mathcal{C}^k$**

Si toutes les dérivées partielles d'ordre k sont continues sur D, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur D.

Si les dérivées partielles de tous ordres existent, f est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$.

- **Théorème de Schwarz**

Si au moins une des deux dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ est continue en a, alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)\,.$$

27 Différentiabilité

2e année

1. Différentielle

1.1 Fonction différentiable (cas général) PSI

Soit f une fonction définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. On dit que f est différentiable en $a \in D$ s'il existe une application linéaire $l \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ telle que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| f(a+h) - f(a) - l(h) \|}{\|h\|} = 0\,.$$

Dans ce cas, l'application l est unique. On l'appelle la différentielle de f au point a et on la note $\mathrm{d}f_a$.

1.2 Théorèmes (cas $p = 1$) PSI

Si f est différentiable en a, alors toutes les dérivées partielles premières de f en a existent.

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ en a, alors f est différentiable en a.

Les deux réciproques sont fausses.



En PC et PT f est supposée de classe $\mathcal{C}^1$ dans ce qui suit.
Et en MP et PSI, c'est aussi le cas dans la pratique.

1.3 Notation différentielle (cas $p = 1$)

Si $p = 1$, toute application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est de la forme :

$$h = (h_1,\ldots,h_n) \mapsto l(h) = \sum_{i=1}^{n} A_i\, h_i\,.$$

Si f est différentiable en a, on a nécessairement $A_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

En notant $\mathrm{d}x_i$ la i-ième projection de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}$ (définie par $\mathrm{d}x_i(h) = h_i$), la différentielle de f s'écrit :

$$\mathrm{d}f_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, \mathrm{d}x_i\,.$$

1.4 Dérivée dans une direction (cas $p = 1$)

La dérivée de f en $a = (a_1,\dots,a_n)$ dans la direction du vecteur unitaire $\overrightarrow{u}\,(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ est :

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1 + t\alpha_1,\dots,a_n + t\alpha_n) - f(a_1,\dots,a_n)}{t}\,.$$

Lorsque f est différentiable, cette limite existe et vaut :

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(a) = \overrightarrow{\text{grad}}\, f(a) \cdot \overrightarrow{u}\,.$$

Cette dérivée directionnelle est maximum dans la direction du gradient et vaut alors $\|\overrightarrow{\text{grad}}\, f(a)\|$.



Si la dérivée directionnelle en a n'est pas égale au produit scalaire précédent, c'est une preuve que f n'est pas différentiable en a.

Sur les cartes d'état-major, le gradient indique la ligne plus grand pente. Il est orthogonal aux lignes de niveau.

1.5 Matrice jacobienne (cas général)

Soit $f : D \to \mathbb{R}^p$ une fonction définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^n$, de classe $\mathcal{C}^1$ en $a \in D$. On appelle matrice jacobienne de f au point a la matrice de sa différentielle en a :

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

1.6 Jacobien

Si $n = p$, le déterminant de $J_f(a)$ est le jacobien de f au point a.

On le note $\dfrac{\mathrm{D}(f_1,\dots,f_n)}{\mathrm{D}(x_1,\dots,x_n)}(a)$.

2. Composition

2.1 Différentielle d'une composée

Soit $f : D_1 \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $g : D_2 \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ deux fonctions définies sur des ouverts tels que $f(D_1) \subset D_2$.

Si f est différentiable en a et g différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et l'on a :

$$\mathrm{d}(g \circ f)_a = \mathrm{d}g_{f(a)} \circ \mathrm{d}f_a,$$

c'est-à-dire sous forme matricielle :

$$J_{g \circ f}(a) = J_g\big(f(a)\big) \times J_f(a).$$

Dans le cas $q = 1$ on a alors :

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a) \times \frac{\partial g}{\partial y_k}\big(f(a)\big).$$

2.2 Difféomorphisme

- **Définition**

Soit $n = p$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $V = f(U)$. On dit que f est un difféomorphisme de U sur V si f est une bijection et si f et f^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et V respectivement.

- **Théorème d'inversion locale**

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert D.

Soit $a \in D$ tel que $\mathrm{d}f_a$ soit inversible, c'est-à-dire tel que le jacobien $\dfrac{\mathrm{D}(f_1,\ldots,f_n)}{\mathrm{D}(x_1,\ldots,x_n)}(a)$ soit non nul.

Il existe un voisinage ouvert U de a tel que f soit un difféomorphisme de U sur $f(U)$.

Extremum d'une fonction à plusieurs variables

28

2e année

1. Définitions

Soit f une fonction numérique définie sur $D \subset \mathbb{R}^n$.

f admet un maximum (resp. minimum) global (ou absolu) en $a \in D$ si

$$\forall x \in D \qquad f(x) \leqslant f(a) \qquad (\text{resp. } f(x) \geqslant f(a))$$

f admet un maximum (resp. minimum) local (ou relatif) en $a \in D$ s'il existe un voisinage V de a tel que :

$$\forall x \in V \qquad f(x) \leqslant f(a) \qquad (\text{resp. } f(x) \geqslant f(a))$$

2. Existence d'un minimum et d'un maximum globaux

Si D est compact (c'est-à-dire fermé et borné puisqu'on est en dimension finie) et si f est continue, alors f admet un maximum et un minimum globaux atteints au moins une fois.

3. Condition nécessaire d'extremum local

Si f présente un extremum local en a, et si f est différentiable en ce point, alors :

$$\forall i \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \qquad \text{ou encore} \qquad \overrightarrow{\text{grad}} f(a) = \overrightarrow{0}.$$

Un point vérifiant cette condition est appelé point critique, ou point stationnaire, de f.



Les éventuels extremums sont donc à chercher parmi les points critiques et les points où f n'est pas différentiable (le plus souvent les points frontière de D).

En l'absence de théorème donnant une condition suffisante, étudiez le signe de la différence $f(x) - f(a)$ pour x voisin de a, ou, mieux, le signe de

$$\Delta(h_1,\ldots h_n) = f(a_1 + h_1,\ldots,a_n + h_n) - f(a_1,\ldots,a_n)$$

avec les h_i voisins de 0.

4. Condition suffisante d'extremum local (cas de 2 variables) PT

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}^2$ et (x_0, y_0) un point critique ; posons :

$$R = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \;\; ; \;\; S = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \;\; ; \;\; T = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \, .$$

On a alors :

- si $S^2 - RT < 0$, f présente un extremum relatif en (x_0, y_0) ; il s'agit d'un maximum si $R < 0$ et d'un minimum si $R > 0$;
- si $S^2 - RT > 0$, f présente un point-selle (ou point-col) en (x_0, y_0) ; ce n'est pas un extremum ;



Le mot *col* vient de l'exemple de la fonction altitude et de la configuration (idéalisée) d'un col de montagne : minimum de la ligne de crête, maximum de la route, sans être un extremum du paysage.

Le mot *selle* vient de l'exemple d'une selle de cheval.

- si $S^2 - RT = 0$, on ne peut pas conclure à partir des dérivées secondes.

Intégrales doubles 29

1re année

1. Intégrale double d'une fonction continue sur un rectangle

1.1 Sommes de Darboux

Soit f une fonction continue sur un rectangle $R = [a,b] \times [c,d]$ et à valeurs réelles.

Soit $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_m = b$ une subdivision de $[a,b]$ et $y_0 = c < y_1 < \cdots < y_n = d$ une subdivision de $[c,d]$.

Les mn rectangles $R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ forment une subdivision σ de R.

On appelle sommes de Darboux de f associées à σ les nombres :

$$s(\sigma) = \sum_{i,j} \inf_{R_{ij}} f \times \text{aire } R_{ij} \quad \text{et} \quad S(\sigma) = \sum_{i,j} \sup_{R_{ij}} f \times \text{aire } R_{ij}$$

L'ensemble des sommes $s(\sigma)$, quand σ varie, est majoré.

L'ensemble des sommes $S(\sigma)$, quand σ varie, est minoré.

1.2 Intégrale

Si f est continue, la borne supérieure des $s(\sigma)$ est égale à la borne inférieure des $S(\sigma)$. Cette valeur commune est appelée intégrale de f sur R et notée :

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{ou} \quad \iint_R f$$

1.3 Sommes de Riemann

f étant continue sur R, soit σ la subdivision de R obtenue en partageant $[a,b]$ en m intervalles égaux et $[c,d]$ en n intervalles égaux. Alors, on a :

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{b-a}{m}\,\frac{d-c}{n}\, f(x_i, y_j)$$

1.4 Propriétés de l'intégrale

• **Linéarité**

Soit f et g deux fonctions continues sur R et λ et μ deux réels ; alors :

$$\iint_R \left[\lambda f(x,y) + \mu\, g(x,y)\right] \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \lambda \iint_R f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + \mu \iint_R g(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

- **Croissance**

Soit f et g deux fonctions continues sur R telles que $f(x,y) \leqslant g(x,y)$ pour tout $(x,y) \in R$; alors :

$$\iint_R f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \leqslant \iint_R g(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,.$$

On en déduit que :

$$\left| \iint_R f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \right| \leqslant \iint_R |f(x,y)|\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,.$$

1.5 Théorème de Fubini

Soit f une fonction continue sur un rectangle $R = [a,b] \times [c,d]$ et à valeurs réelles. On a :

$$\iint_R f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Ce théorème permet de calculer l'intégrale double par deux intégrales simples successives.



Il peut arriver que l'un des emboîtements ne permette pas le calcul de primitives et que l'autre conduise au résultat.

1.6 Cas particulier

Dans le cas où f s'écrit sous la forme d'un produit de deux fonctions continues à une variable :

$$f(x,y) = g(x)\, h(y)$$

l'intégrale double sur le rectangle est alors le produit de deux intégrales simples :

$$\iint_R f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x \times \int_c^d h(y)\, \mathrm{d}y$$

2. Extension à une partie fermée bornée du plan

Soit f une fonction continue sur une partie A fermée bornée de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On peut prolonger la notion d'intégrale double de f sur A avec les mêmes propriétés que sur un rectangle.

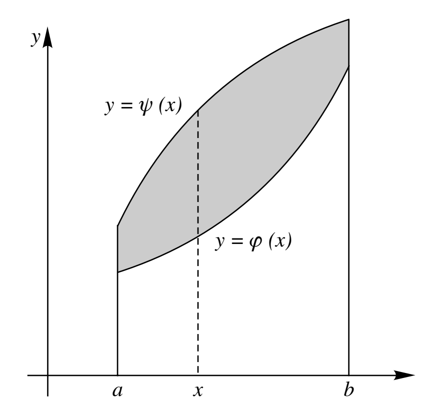
2.1 Théorème de Fubini

Soit φ et ψ deux fonctions continues sur $[a,b]$ avec $\varphi \leqslant \psi$; notons A l'ensemble des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$a \leqslant x \leqslant b \quad \text{et} \quad \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x).$$

Alors :

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$



On peut permuter les rôles de x et de y.

2.2 Additivité par rapport au domaine d'intégration

Si A est la réunion de deux parties A_1 et A_2 fermées bornées telles que $A_1 \cap A_2$ soit d'aire nulle, alors :

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{A_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{A_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

3. Changement de variables

3.1 Théorème

Soit $f(x,y)$ une fonction continue sur le domaine D fermé et borné, en bijection avec un domaine fermé et borné Δ au moyen des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ $x = \varphi(u,v)$ et $y = \psi(u,v)$; alors :

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Delta f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Le déterminant $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial\psi}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix}$

est le jacobien du changement de variables.

3.2 Cas des coordonnées polaires

Le changement de variables $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$ a pour jacobien $\dfrac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \rho$, d'où :

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Delta f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$



Grâce à cette transformation, l'intégration sur un disque, une couronne ou un secteur angulaire se ramène à une intégration sur un rectangle.

Intégrales triples et applications

PC-PT

30

2e année

1. Intégrales triples

1.1 Approche et calcul

f étant une fonction continue sur un domaine fermé et borné D de $\mathbb{R}^3$, on définit l'intégrale triple $\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ de façon analogue aux intégrales doubles.

Le calcul pratique se fait par intégrations successives à l'aide du théorème de Fubini prolongé en dimension 3.

L'intégrale triple possède les propriétés de linéarité habituelles et la propriété d'additivité par rapport à la réunion de domaines dont l'intersection est de volume nul.

1.2 Changement de variables

Dans le cas général, si D est en bijection avec Δ, supposé aussi fermé et borné, au moyen des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$

on a :

$$\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$= \iiint_\Delta f\big(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\big)\ \left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

En particulier, si le même domaine géométrique est représenté par une partie D de $\mathbb{R}^3$ en coordonnées cartésiennes et par une partie Δ (plus simple) en coordonnées cylindriques ou sphériques, on utilise la formule de changement de variables

• en coordonnées cylindriques :

$$\iiint_D f(x,y,z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = \iiint_\Delta f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\ \rho\ \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}z\,,$$

• en coordonnées sphériques :

$$\iiint_D f(x,y,z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$$

$$= \iiint_\Delta f(r\cos\varphi\cos\theta,r\cos\varphi\sin\theta,r\sin\varphi)\ r^2\cos\varphi\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}\theta\,.$$



Attention, dans cette formule φ est la latitude. N'oubliez pas de modifier si vous utilisez la colatitude.

2. Applications

2.1 Aire et volume

Si $f(x,y) = 1$, l'intégrale double $\iint_A \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ est l'aire de A.

Si $f(x,y,z) = 1$, l'intégrale triple $\iiint_A \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$ est le volume de A.

2.2 Moments et centres d'inertie

Supposons que $f(x,y)$, ou $f(x,y,z)$, représente la densité surfacique au point (x,y), ou la densité volumique au point (x,y,z), d'une surface ou d'un volume A.

• **Masse**

L'intégrale double, ou triple de f sur A est alors la masse M de A.

• **Centre d'inertie**

Le centre d'inertie G d'un solide A est défini par ses coordonnées :

$$x_G = \frac{1}{M}\iint_A x\ f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \quad ; \quad y_G = \frac{1}{M}\iint_A y\ f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\,.$$

Dans l'espace, les coordonnées de G sont des intégrales triples analogues.

- **Moments d'inertie**

Le moment d'inertie de A par rapport à un point O, ou par rapport à un axe Δ, est le nombre :

$$\iint_A r^2(x,y)\ f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\,,$$

où $r(x,y)$ est la distance du point (x,y) à O, ou à Δ.

Dans l'espace, l'intégrale double est remplacée par une intégrale triple.

On définit aussi le moment d'inertie d'un solide par rapport à un plan.

31 Intégrales curvilignes

2e année

1. Formes différentielles de degré 1

1.1 Définition

Une forme différentielle de degré 1 est une application ω, définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et à valeurs dans le dual $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.

En notant $\mathrm{d}x_i$ la i-ième projection de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}$ (définie par $\mathrm{d}x_i(h) = h_i$), ω s'écrit :

$$\forall x = (x_1,\dots,x_n) \in U \qquad \omega(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x)\,\mathrm{d}x_i\,.$$

Les P_i, applications de U dans $\mathbb{R}$, sont les fonctions coordonnées de ω.



En physique, on associe à ω le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ de composantes (P_1,P_2) dans le plan et (P_1,P_2,P_3) dans l'espace.

Si tous les P_i sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur U, on dit que ω est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.

1.2 Forme exacte

Une forme différentielle ω est exacte s'il existe une fonction f de U dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\mathrm{d}f = \omega.$$

On dit alors que f est une primitive de ω sur U.



En physique, ω exacte signifie que $\overrightarrow{V}$ est un champ de gradients.

1.3 Forme fermée

ω est fermée si :

$$\forall i \quad \forall j \qquad \frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}\,.$$



En physique, cette condition signifie que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}$.

1.4 Condition nécessaire pour ω exacte

Une forme différentielle exacte de classe $\mathcal{C}^1$ est toujours fermée.



En physique, cela signifie que l'on a toujours $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f\right) = \overrightarrow{0}$.

1.5 Ouverts particuliers

Un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est étoilé s'il existe $a \in U$ tel que, pour tout $x \in U$, le segment d'extrémités a et x soit inclus dans U.

Un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est simplement connexe si toute courbe fermée incluse dans U peut se ramener à un point par déformation continue.

1.6 Théorème de Poincaré

Si U est un ouvert étoilé, ou si U est simplement connexe, alors :

$$\omega \text{ exacte sur } U \iff \omega \text{ fermée sur } U.$$



Attention, cette équivalence exige une hypothèse sur U. Elle n'est pas vraie dans le cas du plan privé d'un point, de l'espace privé d'une droite.

2. Intégrale curviligne

2.1 Arc orienté

Soit Γ un arc de courbe défini par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad t \in [a,b]$$

L'arc est orienté par le choix de l'un des deux sens de parcours possibles, ce qui revient à distinguer les vecteurs unitaires tangents (oppposés) $\overrightarrow{T}_+$ et $\overrightarrow{T}_-$.

2.2 Intégrale d'une forme différentielle le long d'un arc orienté

P, Q et R étant des fonctions continues, on appelle intégrale curviligne de la forme différentielle $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$ le nombre noté :

$$\int_{\Gamma^+} \omega = \int_{\Gamma^+} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$$

et défini par :

$$I = \int_a^b \left[P\big(x(t),y(t),z(t)\big)\, x'(t) + Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)\, y'(t) + R\big(x(t),y(t),z(t)\big)\, z'(t)\right] \mathrm{d}t$$



En physique, il s'agit de la circulation de $\overrightarrow{V}$ le long de Γ.

2.3 Propriétés

- **Linéarité par rapport à la forme différentielle**

$$\int_{\Gamma^+} \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 = \lambda_1 \int_{\Gamma^+} \omega_1 + \lambda_2 \int_{\Gamma^+} \omega_2 \,.$$

- **Additivité par rapport aux arcs**

Si Γ a pour origine A et pour extrémité B, et si C est un point de l'arc $\overset{\frown}{AB}$, alors :

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \omega = \int_{\overset{\frown}{AC}} \omega + \int_{\overset{\frown}{CB}} \omega \,.$$

Si $\overset{\frown}{AB}$ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux avec des arcs $\overset{\frown}{AC}$ et $\overset{\frown}{CB}$ qui sont $\mathcal{C}^1$, cette égalité sert de définition à l'intégrale curviligne sur $\overset{\frown}{AB}$.

- **Cas d'une forme exacte**

Si $\omega = \mathrm{d}f$, alors

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \omega = f(B) - f(A)$$

ne dépend que des extrémités du chemin d'intégration. L'intégrale est donc nulle si la courbe est fermée.

3. Formule de Green-Riemann

3.1 Théorème

Soit D une partie fermée bornée du plan limitée par un bord C de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et P et Q des fonctions $\mathcal{C}^1$ dans D. On a :

$$\int_{C^+} P \,\mathrm{d}x + Q \,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y,$$

où le symbole C^+ désigne le bord C, orienté de sorte qu'un mobile parcourant C a toujours D à sa gauche.

3.2 Application aux formes différentielles exactes

La forme différentielle $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ est exacte dans D si, et seulement si, son intégrale sur toute courbe fermée contenue dans D est nulle.

3.3 Application à l'aire d'un domaine plan

$$\text{aire } D = \frac{1}{2}\int_{C^+} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x\,.$$

32 Suites de fonctions

PSI

2e année

(f_n) désigne une suite de fonctions f_n définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Suites de fonctions

(f_n) désigne une suite de fonctions f_n définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Convergence simple

La suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f, de I dans K, si :

$$\forall x \in I \qquad \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x).$$

1.2 Convergence uniforme

f étant la limite simple de la suite (f_n), on dit que la convergence de (f_n) vers f est uniforme sur I si :

$$\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

où $\quad \|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$.



Le nombre $\|f_n - f\|_\infty$ se calcule souvent avec l'étude des variations de la fonction $f_n - f$.

Quand ce calcul est trop difficile, cherchez à minorer ou à majorer.

La convergence uniforme de (f_n) vers f entraîne la convergence simple.



La réciproque est fausse.

1.3 Continuité de la limite

Si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur I, et si chaque f_n est continue sur I, alors f est continue sur I.



Si les f_n sont continues sur I, et si f n'est pas continue sur I, alors la convergence n'est pas uniforme.

Il suffit que la convergence soit uniforme sur tout segment inclus dans I, pour que f soit continue sur I.

1.4 Intégration de la limite

Si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur I, et si chaque f_n est continue sur I, alors pour tous a et b dans I, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$$



Si cette égalité n'a pas lieu, alors la convergence n'est pas uniforme.

1.5 Dérivation de la limite

Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dans I, convergeant en un point $a \in I$.

Si la suite des dérivées (f_n') converge uniformément sur I, alors la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ dans I qui vérifie :

$$\forall x \in I \qquad f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x)\,.$$

2. Approximations uniformes

- Toute fonction f de $[a,b]$ dans K, continue par morceaux, peut être approximée uniformément par des fonctions en escalier, c'est-à-dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier φ telle que :

$$\|f - \varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon\,.$$

- Toute fonction f continue de $[a,b]$ dans K, peut être approximée uniformément par des fonctions polynomiales, c'est-à-dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale g telle que :

$$\|f - g\|_\infty \leqslant \varepsilon\,.$$

- Toute fonction f continue et T-périodique peut être approximée uniformément par des polynômes trigonométriques de même période, c'est-à-dire des combinaisons linéaires d'expressions de la forme $\exp\left(\mathrm{i}\,\dfrac{2\pi}{T}\,kx\right)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

33 Séries de fonctions

PC-PSI

2[e] année

Soit (u_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I. On considère les sommes partielles définies par :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x) .$$

1. Convergence simple

On dit que la série $\sum_n u_n$ converge simplement sur I si la suite (S_n) converge simplement et on note :

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x) = \lim_{n \to +\infty} S_n(x) .$$

2. Convergence uniforme

On dit que la série $\sum_n u_n$ converge uniformément sur I si la suite (S_n) converge uniformément sur I.

3. Convergence normale

3.1 Définition

On dit que la série $\sum_n u_n$ converge normalement sur I si la série des normes $\sum_n \|u_n\|_\infty$ converge.

3.2 Condition nécessaire et suffisante

La série $\sum_n u_n$ converge normalement sur I si, et seulement si, il existe une série numérique à termes positifs a_n telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I \quad |u_n(x)| \leqslant a_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ convergente.}$$



La recherche de a_n peut se faire par majoration ou en étudiant les variations de u_n.

3.3 Théorème

La convergence normale de $\sum_n u_n$ entraîne la convergence uniforme de $\sum_n u_n$ et, pour tout $x \in I$, la convergence absolue de $\sum_n u_n(x)$.



Si vous êtes optimiste (et en PC vous n'avez pas le choix), pour étudier le mode de convergence d'une série de fonctions, commencez par la convergence normale sur I, ou sur tout segment de I.

C'est souvent facile à faire, et, si ça marche, c'est un mode de convergence qui entraîne tous les autres.

4. Propriétés

Pour une série $\sum_n u_n$ qui converge uniformément (normalement entraîne cette condition) sur I, les théorèmes sur les suites de fonctions conduisent à :

4.1 Continuité

Si les u_n sont continues sur I, alors la somme S est continue sur I.

4.2 Intégration

Si les u_n sont continues dans I et si $\sum_n u_n$ converge uniformément sur I, alors, pour tous a et b dans I, on a :

$$\int_a^b \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x)\Big)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\int_a^b u_k(x)\,\mathrm{d}x\Big)$$



On dit que l'on a intégré terme à terme la série.

4.3 Dérivation

Si les u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ dans I et si $\sum_n u'_n$ converge uniformément, alors la somme S est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie :

$$\forall x \in I \qquad S'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u'_k(x)\,.$$



On dit que l'on a dérivé terme à terme la série.

Séries entières

34

2e année

1. Convergence d'une série entière

1.1 Série entière

Une série entière est une série de fonctions de la forme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z) \qquad \text{avec} \qquad u_n(z) = a_n\, z^n$$

où z est la variable réelle ou complexe et les a_n des constantes réelles ou complexes.

1.2 Lemme d'Abel

Si la suite $\left(|a_n|\, r^n\right)$ est bornée, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n$ converge absolument pour tout z tel que $|z| < r$.

1.3 Rayon de convergence

Si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n$ est une série entière, elle vérifie une, et une seule, des trois propriétés :

- la série converge uniquement pour $z = 0$;
- il existe un nombre réel $R > 0$ tel que la série converge absolument pour tout z tel que $|z| < R$, et diverge pour tout z tel que $|z| > R$;
- La série converge absolument pour tout z.

Le nombre R du deuxième cas est appelé rayon de convergence de la série entière.

Dans le premier cas, le rayon de convergence est nul.

Dans le troisième cas, on dit que le rayon de convergence est infini.

1.4 Détermination du rayon de convergence

- Le nombre R est la borne supérieure des ensembles :

$$\{r \in \mathbb{R}_+ \; ; \; \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, r^n \;\; \text{converge}\} \; ; \{r \in \mathbb{R}_+ \; ; \; |a_n|\, r^n \;\; \text{borné}\}$$

• On détermine souvent R à partir de la règle de d'Alembert.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|} = l\,|z|^k$, en écrivant :

$$l\,|z|^k < 1 \iff |z| < \sqrt[k]{\frac{1}{l}}$$

on obtient $R = \sqrt[k]{\dfrac{1}{l}}$ ·


Cette méthode suppose l'existence d'une limite, ce qui n'est pas toujours le cas.

1.5 Mode de convergence

• La série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\,z^n$ de rayon de convergence R converge absolument dans l'intervalle (ouvert) de convergence $]-R,R[$ dans le cas réel ; dans le disque (ouvert) de convergence $B(0,R)$ dans le cas complexe.

Pour $|z| > R$, la série diverge.

Si $|z| = R$, il n'y a pas de résultat général.

• La convergence est normale, donc uniforme, sur tout compact inclus dans le disque (ou l'intervalle) de convergence.

1.6 Opérations algébriques

Soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\,z^n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n\,z^n$ deux séries entières, de rayons de convergence respectifs R_1 et R_2, et de sommes respectives $f(z)$ et $g(z)$.

• **Linéarité**

Pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$, la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(\alpha\,a_n + \beta\,b_n)\,z^n$ a pour somme $\alpha f(z) + \beta g(z)$; son rayon de convergence R est tel que :

$$R = \min(R_1,R_2) \quad \text{si } R_1 \neq R_2$$

$$R \geqslant R_1 \quad \text{si } R_1 = R_2$$

• **Produit**

Si l'on pose :

$$c_n = a_0\, b_n + a_1\, b_{n-1} + \cdots + a_n\, b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}$$

la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, z^n$ a pour somme $f(z)g(z)$; son rayon de convergence R est tel que $R \geqslant \min(R_1, R_2)$.

1.7 Continuité

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$ et de somme $f(z)$.

La fonction f est continue sur son disque de convergence (cas complexe) ou son intervalle de convergence (cas réel).

2. Série entière d'une variable réelle

2.1 Dérivation

Si la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ a pour rayon de convergence $R \neq 0$, alors f est dérivable dans $]-R, R[$ et l'on a :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1}.$$

Il en résulte que f est indéfiniment dérivable sur $]-R, R[$.



Une série entière et sa série dérivée ont même rayon de convergence. Mais, sur le bord de l'intervalle de convergence, les deux séries ne sont pas toujours de même nature.

2.2 Intégration

Si la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ a pour rayon de convergence $R \neq 0$, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}\,.$$

La série entière ainsi obtenue par intégration terme à terme a le même rayon de convergence que la série initiale.

3. Développement d'une fonction en série entière

3.1 Série entière associée à une fonction

Soit f une fonction d'une variable réelle, définie sur un intervalle ouvert U contenant l'origine.

On dit que f est développable en série entière s'il existe une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$ telle que :

$$\forall x \in]-R,R[\cap U \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n\,.$$

On dit aussi que f est analytique en 0.

3.2 Condition nécessaire

Si f est développable en série entière avec $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$, alors f est indéfiniment dérivable et $\quad a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}\,.$

Donc, si le développement en série entière de f existe, il est unique.

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$ est la série de Taylor de f en 0.

Plus généralement, f est analytique en x_0 s'il existe un intervalle ouvert contenant x_0 dans lequel la somme de sa série de Taylor en x_0 est égale à $f(x)$, ce qui signifie qu'il existe $R > 0$ tel que :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n \qquad \text{pour} \qquad |x-x_0| < R\,.$$



Attention, il peut arriver que f soit indéfiniment dérivable au voisinage de 0 et que sa série de Taylor diverge pour tout $x \neq 0$, ou qu'elle converge et que sa somme soit différente de $f(x)$.

3.3 Condition suffisante

Si f est indéfiniment dérivable dans l'intervalle I défini par $|x - x_0| < R$ et s'il existe une constante $M > 0$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I \qquad |f^{(n)}(x)| \leqslant M$$

alors f est analytique en x_0.

3.4 Développements de base

$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$R = +\infty$
$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$
$\text{ch}\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$
$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$
$\text{sh}\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	$R = 1$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$R = 1$
$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$R = 1$

35 Séries de Fourier

2e année

1. Fonctions périodiques

1.1 Définition

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes. Un nombre $T > 0$ est une période de f si :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t+T) = f(t)\,.$$

Le plus petit nombre T vérifiant la propriété est la période de f.

On dit aussi que f est T-périodique.



Une fonction T-périodique est entièrement déterminée par sa restriction à un intervalle de longueur T.

1.2 Propriétés

- L'intégrale d'une fonction continue de période T, sur un intervalle de longueur T, est indépendante des bornes, soit par exemple :

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

- Si f est dérivable, de période T, alors f' est aussi périodique de période T.

1.3 Vocabulaire de la physique

f étant T-périodique, le nombre $\nu = \dfrac{1}{T}$ est la fréquence et le nombre $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ la pulsation.

On appelle énergie moyenne de f sur une période le nombre :

$$\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t\,.$$

Sa racine carrée est appelée valeur efficace de f.

2. Série de Fourier d'une fonction

Soit f est une fonction T-périodique, continue par morceaux.

2.1 Coefficients de Fourier

- **Forme réelle ($n \in \mathbb{N}$)**

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\cos n\omega t \,\mathrm{d}t \;\; ; \;\; b_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\sin n\omega t \,\mathrm{d}t\,.$$

- **Forme complexe ($n \in \mathbb{Z}$)**

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

- **Passage des coefficients complexes aux coefficients réels**

$$\begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} & \text{pour } n \geqslant 0 \\ b_n = \mathrm{i}\,(c_n - c_{-n}) & \text{pour } n \geqslant 1 \end{cases}$$

- **Passage des coefficients réels aux coefficients complexes**

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \quad \text{et pour } n \geqslant 1 : \quad c_n = \frac{a_n - \mathrm{i}\,b_n}{2} \;\; ; \;\; c_{-n} = \frac{a_n + \mathrm{i}\,b_n}{2}\,.$$

2.2 Série de Fourier d'une fonction périodique

On associe à f une série qui, lorsqu'elle converge, définit une fonction S périodique de période T.

- **Forme réelle**

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\,.$$

- **Forme complexe**

$$S(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n\,\mathrm{e}^{in\omega t}\,.$$

2.3 Propriétés

- **Parité**

Si f est une fonction paire, pour tout n on a $b_n = 0$, soit $c_n = c_{-n}$. Si f est une fonction impaire, pour tout n on a $a_n = 0$, soit $c_n = -c_{-n}$.

- **Coefficients de Fourier d'une dérivée**

Si f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, les coefficients de Fourier de f et f' sont reliés par :

Forme complexe :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad c_n(f') = \mathrm{i}\, n\, \omega\, c_n(f) \;\; ;$$

Forme réelle :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad a_n(f') = n\, \omega\, b_n(f) \qquad \text{et} \qquad b_n(f') = -n\, \omega\, a_n(f)\,.$$

3. Convergence de la série de Fourier d'une fonction

3.1 Fonction $\mathcal{C}^1$ par morceaux

On dit que f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur le segment $[a,b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_p = b$ telle que :

- f soit définie, continue, dérivable et à dérivée continue dans chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[\;\; (i = 0,\ldots,p-1)$,
- $f(t)$ et $f'(t)$ possèdent une limite en chaque extrémité de ces intervalles.

3.2 Théorème de Dirichlet

Si f est périodique de période T et est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur tout un segment de longueur T, alors la série de Fourier de f est convergente et sa somme S vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad S(t) = \frac{f(t_+) + f(t_-)}{2}\,.$$

De plus, la convergence est normale (donc uniforme) sur tout segment où la fonction est continue, ou sur $\mathbb{R}$ si f est continue sur $\mathbb{R}$.



Remarquez que si f est continue en t, alors $S(t) = f(t)$.

3.3 Formule de Parseval

Si f est continue par morceaux sur un segment de longueur T on a la relation suivante reliant l'énergie de f et les énergies des termes de sa série de Fourier :

$$\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} [f(t)]^2 \mathrm{d}t = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2\,.$$

Fonctions définies par une intégrale

36

2e année

1. Cas de l'intégrale définie

1.1 Existence et continuité

Soit f une fonction de deux variables, continue sur $[a,b] \times [c,d]$; alors la fonction F définie par $F(x) = \int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t$$

1.2 Dérivabilité

Si f et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ sont continues sur $[a,b] \times [c,d]$, alors F est dérivable sur $[a,b]$ et on a :

$$F'(x) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Si de plus, u et v sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a,b]$ dans $[c,d]$, alors la fonction G définie par $G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable et

$$G'(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t + f\big(x,v(x)\big)\,v'(x) - f\big(x,u(x)\big)\,u'(x)\,.$$

2. Cas de l'intégrale généralisée

Soit f une fonction de deux variables, continue sur $I \times]a,+\infty[$.

Lorsqu'elle existe, on considère la fonction F définie sur I par

$$F(x) = \int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t\,.$$

2.1 Existence et continuité

S'il existe une fonction positive g définie, continue par morceaux et sommable sur $]a,+\infty[$, et qui vérifie :

$$\forall x \in I \qquad \forall t \in]a,+\infty[\qquad |f(x,t)| \leqslant g(t)$$

alors F existe et est continue sur I.

2.2 Dérivabilité

Supposons en plus que f admette une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $I\times]a,+\infty[$ et qu'il existe une fonction positive h définie, continue par morceaux et sommable sur $]a,+\infty[$, et qui vérifie :

$$\forall x \in I \qquad \forall t \in]a,+\infty[\qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant h(t)$$

alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $F'(x) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

2.3 Remarques

- Le théorème précédent se généralise pour les dérivées successives de F.
- Pour la continuité et les dérivabilités successives, il suffit d'établir les hypothèses de domination du type $|f(x,t)| \leqslant g(t)$ sur tout segment de I.

Partie 3

Algèbre générale

37 Logique binaire

1re année

1. Proposition logique

C'est un assemblage de lettres et de signes qui a une syntaxe correcte (le lecteur sait le lire), une sémantique correcte (le lecteur comprend ce qu'il lit) et qui a une seule valeur de vérité : vrai (V) ou faux (F).

Deux propositions seront considérées comme égales si elles ont toujours la même valeur de vérité.

2. Connecteurs logiques

À partir de propositions $p, q, \ldots$ on peut former de nouvelles propositions définies par des tableaux de vérité.

• **Négation** : non p (noté aussi $\neg p$)

p	non p
V	F
F	V

- **Conjonction** : p et q (noté aussi $p \wedge q$)
- **Disjonction** : p ou q (noté aussi $p \vee q$)
- **Implication** : $p \Longrightarrow q$
- **Équivalence** : $p \Longleftrightarrow q$

p	q	p et q	p ou q	$p \Longrightarrow q$	$p \Longleftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V



Le ou a un sens inclusif, à ne pas confondre avec le sens exclusif qui figure dans « fromage ou dessert ».

3. Propriétés des connecteurs

non (non p) $= p$

non (p ou q) $=$ (non p) et (non q)

non (p et q) $=$ (non p) ou (non q)

$(p \Longrightarrow q) = \big[$(non p) ou $q\big]$

non $(p \Longrightarrow q) = \big[p$ et (non q)$\big]$



La négation d'une implication n'est donc pas une implication.

$(p \Longrightarrow q) = \big[$(non q) $\Longrightarrow$ (non p)$\big]$



Cette seconde implication est la contraposée de la première. Faites attention à l'ordre des propositions.

$(p \Longleftrightarrow q) = \big[(p \Longrightarrow q)$ et $(q \Longrightarrow p)\big]$



Pour démontrer une équivalence, on démontre souvent une implication et sa réciproque.

4. Quantificateurs

- **Notation**

Les quantificateurs servent à indiquer la quantité d'éléments qui interviennent dans une proposition. On utilise :

le quantificateur universel $\forall$

$$\forall x \quad \text{signifie : pour tout } x \ ;$$

le quantificateur existentiel $\exists$

$$\exists x \quad \text{signifie : il existe au moins un } x.$$

- **Ordre**

Si l'on utilise deux fois le même quantificateur, l'ordre n'a pas d'importance.

On peut permuter les quantificateurs dans des écritures du type :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad p(x,y)$$
$$\exists x \in E \quad \exists y \in E \quad p(x,y)$$

Mais si les quantificateurs sont différents, leur ordre est important.

Dans l'écriture $\forall x \in E \quad \exists\, y \in E \quad p(x,y)$ y dépend de x.

Dans l'écriture $\exists\, y \in E \quad \forall x \in E \quad p(x,y)$ y est indépendant de x.

- **Négation**

La négation de « $\forall x \in E$ x vérifie p » est « $\exists\, x \in E$ tel que x ne vérifie pas p ».

La négation de « $\exists\, x \in E$ x vérifie p » est « $\forall x \in E$ x ne vérifie pas p ».

5. Quelques méthodes de démonstrations

- **Déduction**

Si p est vraie et si l'on démontre $(p \Longrightarrow q)$, alors on peut conclure que q est vraie.



Si la démonstration d'une implication vous résiste, pensez à examiner la contraposée. Elle a le même sens, mais il est possible que sa démonstration soit plus facile.

- **Raisonnement par l'absurde**

Pour démontrer que p est vraie, on peut supposer que p est fausse et en déduire une contradiction.



Comme vous partez de non p, ne vous trompez pas dans la négation, en particulier en ce qui concerne les quantificateurs.

- **Disjonction des cas**

Elle est basée sur :

$$\left[(p \Longrightarrow q) \text{ et } (\text{ non } p \Longrightarrow q)\right] \Longrightarrow q$$

- **Exemples et contre-exemples**

Beaucoup de propositions mathématiques sont de type universel. Dans ce cas,
un exemple est une illustration, mais ne démontre rien,
un contre-exemple est une démonstration que la proposition est fausse.

- **Raisonnement par récurrence**

Voir fiche 41.

Ensembles 38

1re année

1. Notion d'ensemble

La notion d'ensemble est considérée comme primitive. Retenons que la caractérisation d'un ensemble E doit être nette, c'est-à-dire que, pour tout élément x, on doit pouvoir affirmer ou bien qu'il est dans E ($x \in E$), ou bien qu'il n'y est pas ($x \notin E$).

On note $\varnothing$ l'ensemble vide, c'est-à-dire l'ensemble qui ne contient aucun élément.

E et F étant des ensembles, on dit que E est inclus dans F si, et seulement si, tous les éléments de E appartiennent aussi à F. On note $E \subset F$.

On dit aussi que E est une partie de F, ou que F contient E.

L'ensemble des parties de E se note $\mathcal{P}(E)$. Dire que $A \in \mathcal{P}(E)$ signifie que $A \subset E$.

2. Opérations dans $\mathcal{P}(E)$

Soit E un ensemble. A et B étant des parties de E, on définit :

• le **complémentaire** de A dans E : $\overline{A} = \{x \in E \ ; \ x \notin A\}$;

• l'**intersection** de A et de B : $A \cap B = \{x \in E \ ; \ x \in A \text{ et } x \in B\}$;

Si $A \cap B = \varnothing$, c'est-à-dire s'il n'existe aucun élément commun à A et B, on dit que les parties A et B sont disjointes ;

• la **réunion** de A et de B : $A \cup B = \{x \in E \ ; \ x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

Ce « ou » a un sens inclusif c'est-à-dire que $A \cup B$ est l'ensemble des éléments x de E qui appartiennent à l'une au moins des parties A et B.

• la **différence** : $A \setminus B = \{x \in E \ ; \ x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \overline{B}$;

• la **différence symétrique** :

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)\,.$$

$A \Delta B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à une, et une seule, des parties A et B.

3. Recouvrement, partition

- Un recouvrement d'une partie A de E est une famille de parties de E dont la réunion contient A.
- Une partition d'un ensemble E est une famille de parties non vides de E, deux à deux disjointes, et dont la réunion est E.

4. Propriétés des opérations dans $\mathcal{P}(E)$

Pour toutes parties A, B et C de E, on a les propriétés qui suivent.

- **Complémentaire**

$$\overline{E} = \varnothing \quad ; \quad \overline{\varnothing} = E \quad ; \quad \overline{\overline{A}} = A \quad ; \quad \text{si } A \subset B \text{ alors } \overline{B} \subset \overline{A}\,.$$

- **Lois de de Morgan**

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \;\; ; \;\; \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}\,.$$

- **Réunion**

$$A \cup B = B \cup A \;\; ; \;\; A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cup A = A \;\; ; \;\; A \cup \varnothing = A \;\; ; \;\; A \cup E = E\,.$$

- **Intersection**

$$A \cap B = B \cap A \quad ; \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cap A = A \;\; ; \;\; A \cap \varnothing = \varnothing \;\; ; \;\; A \cap E = A\,.$$

- **Réunion et intersection**

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

5. Produit cartésien

Le produit des ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \times B$, des couples (a,b) où $a \in A$ et $b \in B$.



Attention, le couple (b,a) est différent du couple (a,b), sauf si $a = b$.

Plus généralement, le produit cartésien de n ensembles E_i est :

$$E_1 \times \cdots \times E_n = \{(x_1,\ldots,x_n) \; ; \; x_1 \in E_1,\ldots,x_n \in E_n\}\,.$$

Si $E_1 = \cdots = E_n = E$, on le note E^n.

Applications 39

1re année

1. Généralités

1.1 Définitions

Une application f de E dans F est définie par son ensemble de départ E, son ensemble d'arrivée F, et son graphe Γ.

Γ est une partie de $E \times F$ telle que, pour tout $x \in E$, il existe un seul couple $(x,y) \in \Gamma$. L'élément y est l'image de x par f. On le note $f(x)$.

L'application f se note : $E \xrightarrow{f} F$ ou $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$.

Les applications de E dans F forment un ensemble noté $\mathcal{F}(E,F)$.

L'application identique de E est l'application de E dans E définie par $x \mapsto x$. On la note Id_E.

1.2 Restriction, prolongement

Soit f une fonction de A dans F, et g une fonction de B dans F.

Si $A \subset B$ et si, pour tout x de A, on a $f(x) = g(x)$, on dit que f est une restriction de g, ou que g est un prolongement de f.

1.3 Composition des applications

Soit E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F, g une application de F dans G.

La composée de f et de g est l'application de E dans G définie par :

$$x \mapsto g\big(f(x)\big).$$

On la note $g \circ f$. La composition des applications est associative.

2. Applications injectives, surjectives, bijectives

Soit f une application de E dans F.

2.1 Applications injectives

f est dite injective (ou est une injection) si elle vérifie l'une des deux propriétés équivalentes :

$$\forall x \in E \quad \forall x' \in E \qquad x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$$

$$\forall x \in E \quad \forall x' \in E \qquad f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'.$$



Ne confondez pas avec la définition d'une application qui s'écrit :

$$\forall x \in E \quad \forall x' \in E \qquad x = x' \Longrightarrow f(x) = f(x')$$

$$\forall x \in E \quad \forall x' \in E \qquad f(x) \neq f(x') \Longrightarrow x \neq x'.$$

2.2 Applications surjectives

f est dite surjective (ou est une surjection) si tout élément y de F est l'image d'au moins un élément x de E, soit :

$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad y = f(x).$$

2.3 Applications bijectives

f est dite bijective (ou est une bijection) si elle est à la fois injective et surjective. Dans ce cas, tout élément y de F est l'image d'un, et un seul, élément x de E. À tout y de F, on associe ainsi un x unique dans E noté $f^{-1}(y)$. f^{-1} est la bijection réciproque de f. On a donc :

$$x = f^{-1}(y) \Longleftrightarrow y = f(x),$$

ce qui entraîne $f \circ f^{-1} = Id_F$ et $f^{-1} \circ f = Id_E$.

2.4 Théorème

Soit f une application de E dans F, et g une application de F dans G. On a les implications qui suivent.

Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.

Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective, et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

3. Images directe et réciproque

3.1 Définitions

Soit f une application de E dans F.

Si $A \subset E$, on appelle image de A par f, la partie de F constituée par les images des éléments de A :

$$f(A) = \{f(x)\ ;\ x \in A\}.$$

Si $B \subset F$, on appelle image réciproque de B, la partie de E constituée par les x dont l'image est dans B :

$$\overset{-1}{f}(B) = \{x \in E\ ;\ f(x) \in B\}.$$



Attention à ne pas confondre avec la réciproque d'une bijection. Ici, on ne suppose rien sur f.

3.2 Théorème

$$A_1 \subset A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subset f(A_2)\ ;\ B_1 \subset B_2 \Longrightarrow \overset{-1}{f}(B_1) \subset \overset{-1}{f}(B_2)$$

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)\ ;\ f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)\ ;$$

$$\overset{-1}{f}(B_1 \cup B_2) = \overset{-1}{f}(B_1) \cup \overset{-1}{f}(B_2)\ ;\ \overset{-1}{f}(B_1 \cap B_2) = \overset{-1}{f}(B_1) \cap \overset{-1}{f}(B_2).$$

40 Relations

1re année

1. Relation binaire

Choisir une partie Γ de $E \times E$, c'est définir une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E. Si $(x,y) \in \Gamma$, on dit que x et y sont en relation, et on note $x\mathcal{R}y$.

Une relation binaire $\mathcal{R}$, définie sur un ensemble E, est :

réflexive si elle vérifie : $\forall x \in E \quad x\mathcal{R}x$;

symétrique si $\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$;

antisymétrique si elle vérifie l'une des deux propriétés équivalentes :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \qquad (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Longrightarrow x = y,$$

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \qquad (x\mathcal{R}y \text{ et } x \neq y) \Longrightarrow \text{non } (y\mathcal{R}x)\ .$$

transitive si elle vérifie :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \forall z \in E \qquad (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Longrightarrow x\mathcal{R}z.$$



Attention, l'antisymétrie n'est pas le contraire de la symétrie. L'égalité est à la fois symétrique et antisymétrique. Une relation peut n'être ni symétrique, ni antisymétrique.

2. Relation d'ordre

2.1 Définitions

Une relation binaire $\mathcal{R}$, définie sur un ensemble E, est une relation d'ordre si elle est, à la fois, réflexive, antisymétrique et transitive.

Notons la $\prec$.

Une relation d'ordre $\prec$ dans E est dite relation d'ordre total si deux éléments quelconques x et y de E sont toujours comparables, c'est-à-dire si l'on a $x \prec y$ ou $y \prec x$.

Dans le cas contraire, l'ordre est partiel.

2.2 Exemples

$\leqslant$ est un ordre total dans $\mathbb{R}$. $\subset$ est un ordre partiel dans $\mathcal{P}(E)$.

2.3 Éléments particuliers

Soit A une partie d'un ensemble ordonné E.

- S'il existe un élément a de E tel que, pour tout $x \in A$, on ait $x \prec a$, on dit que a est un majorant de A, que A est une partie majorée de E.

De même, un élément b de E est un minorant de A si $b \prec x$ pour tout x de A. On dit alors que A est une partie minorée de E.

Une partie bornée de E est une partie qui est à la fois majorée et minorée.

- Un élément a de E est appelé plus grand élément de A si $a \in A$ et si a est un majorant de A. Si un tel élément existe, il est unique.

De même, un élément b de E est le plus petit élément de A si $b \in A$ et si b est un minorant de A.

- On appelle borne supérieure d'une partie majorée A, le plus petit des majorants de A, et borne inférieure d'une partie minorée A le plus grand des minorants de A.

Si ces bornes existent, elle sont uniques.

Dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$, pour démontrer que a est la borne supérieure de A, on démontre souvent :

– que c'est un majorant, soit $x \leqslant a$ pour tout $x \in A$;

– que, pour tout $\varepsilon > 0$, $a - \varepsilon$ n'est pas un majorant, c'est-à-dire qu'il existe $x \in A$ tel que $a - \varepsilon < x$.

41 Entiers naturels

1re année

1. Nombres entiers naturels

1.1 Propriétés fondamentales de $\mathbb{N}$

L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est totalement ordonné et vérifie les propriétés :

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément.

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ a un plus grand élément.

$\mathbb{N}$ n'a pas de plus grand élément.

1.2 Raisonnement par récurrence

Soit $E(n)$ un énoncé qui dépend d'un entier naturel n.

Si $E(0)$ est vrai, et si, quel que soit $k \geqslant 0$, l'implication $E(k) \Longrightarrow E(k+1)$ est vraie, alors l'énoncé $E(n)$ est vrai pour tout entier n.

Ce principe a diverses variantes, par exemple :

si $E(0)$ est vrai, et si, quel que soit $k \geqslant 0$, l'implication

$$\big[\, E(0) \text{ et } E(1) \text{ et } \ldots \text{ et } E(k) \,\big] \Longrightarrow E(k+1)$$

est vraie, alors l'énoncé $E(n)$ est vrai pour tout entier n.

2. Ensembles finis

2.1 Définition

Un ensemble E est fini s'il existe une bijection d'un intervalle $[\![1,n]\!]$ de $\mathbb{N}$ sur E.

Le nombre n est le cardinal (ou nombre d'éléments) de E. On le note $n = \text{card } E$.

On convient que l'ensemble vide est fini, et que $\text{card } \varnothing = 0$.

Si E n'est pas vide, il existe une bijection strictement croissante, et une seule, de l'intervalle $[\![1,n]\!]$ sur E.

2.2 Inclusion

Soit E un ensemble fini. Toute partie A de E est finie, et on a :

$$\text{card}A \leqslant \text{card } E \;;$$

l'égalité des cardinaux ayant lieu si, et seulement si, $A = E$.



Attention, cette propriété, qui semble intuitive, n'est pas vraie pour les ensembles infinis. Par exemple, l'ensemble P des entiers naturels pairs est en bijection avec $\mathbb{N}$, et pourtant $P \neq \mathbb{N}$.

Une partie non vide A de $\mathbb{N}$ est finie si, et seulement si, elle est majorée.

2.3 Applications

Soit E et F deux ensembles finis de même cardinal, et f une application de E dans F. On a l'équivalence des trois propriétés :

$$f \text{ bijective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ surjective.}$$

Dans ce cas, pour démontrer que f est bijective, il suffit de démontrer, soit que f est injective, soit que f est surjective.



Cette propriété n'est pas vraie pour les ensembles infinis.

3. Sommes et produits

3.1 Notations

Dans $\mathbb{R}$, considérons une famille d'éléments $a_1,\ldots,a_n$.

On note cette famille $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, la somme des termes $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$ ou $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_i$, le produit des termes $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i$ ou $\displaystyle\prod_{1\leqslant i\leqslant n} a_i$.

Lorsque l'indice décrit, non plus $\{1,\ldots,n\}$, mais un ensemble fini I, on note de même $(a_i)_{i\in I}$, $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i$, $\displaystyle\prod_{i\in I} x_i$.

En particulier, on utilise souvent $I = \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,p\}$ avec un indice noté i,j, ou ij.

3.2 Quelques propriétés

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i+y_i)=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}x_i+\sum_{1\leqslant i\leqslant n}y_i\ ;\ \sum_{1\leqslant i\leqslant n}(kx_i)=k\sum_{1\leqslant i\leqslant n}x_i\ ;$$

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i\,y_i)=\prod_{1\leqslant i\leqslant n}x_i\times\prod_{1\leqslant i\leqslant n}y_i\ ;\ \prod_{1\leqslant i\leqslant n}(kx_i)=k^n\prod_{1\leqslant i\leqslant n}x_i\ ;$$

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}x_{ij}=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant p}x_{ij}\Big)=\sum_{1\leqslant j\leqslant p}\Big(\sum_{1\leqslant i\leqslant n}x_{ij}\Big)$$

4. Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

4.1 Division euclidienne

Pour tout $(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, il existe un élément unique $(q,r)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ tel que :

$$a=bq+r\qquad\text{avec}\qquad 0\leqslant r<b.$$

q est le quotient et r le reste de la division euclidienne de a par b.

4.2 Divisibilité

Si $(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, on dit que b divise a si, et seulement si, il existe $q\in\mathbb{Z}$ tel que $a=bq$.

On dit que a est un multiple de b, ou que b est un diviseur de a.

La relation de divisibilité est une relation d'ordre partiel dans $\mathbb{N}$.

4.3 Nombres premiers

Un entier p est premier si $p\geqslant 2$, et si ses seuls diviseurs sont 1 et p.

Il y a une infinité de nombres premiers.

Si n n'est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$, alors il est premier.

Tout entier n, avec $n\geqslant 2$, s'écrit de façon unique comme produit de nombres premiers.

Dénombrement 42

1re année

1. Opérations sur les ensembles finis

1.1 Réunion

La réunion de n ensembles finis est un ensemble fini. On a :

$$\text{card}\,(E \cup F) = \text{card}\,E + \text{card}\,F - \text{card}\,(E \cap F)\,.$$

Dans le cas particulier d'ensembles E_i deux à deux disjoints, on a :

$$\text{card}\,(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = \sum_{i=1}^{n} \text{card}\,E_i\,.$$

1.2 Produit cartésien

Le produit cartésien de 2 ensembles finis est un ensemble fini, et on a :

$$\text{card}\,(E \times F) = \text{card}\,E \times \text{card}\,F\,.$$

1.3 Bilan pour dénombrer

Quand une situation comporte plusieurs choix à réaliser,
on effectue un produit quand on doit faire un choix, *puis* un autre …
on effectue une somme quand on doit faire un choix *ou bien* un autre …

2. Dénombrement de listes

2.1 Nombre d'applications

Soit E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs p et n.

L'ensemble $\mathcal{F}(E,F)$ des applications de E dans F est fini et a pour cardinal n^p.

On peut assimiler une application f de E dans F à la liste ordonnée des p images des éléments de E, c'est-à-dire un élément du produit cartésien F^p. On dit qu'il s'agit d'une p-liste d'éléments de F.

Le nombre de p-listes d'éléments de F est n^p.

C'est aussi le nombre de façons d'extraire p boules parmi n boules, avec remise et en tenant compte de l'ordre.

2.2 Arrangements

Soit E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs p et n.

Le nombre d'applications injectives de E dans F est égal à :

$$A_n^p = n\,(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

où $n!$ (lire factorielle n) est défini pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n \quad \text{si} \quad n \in \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad 0! = 1.$$

On dit que A_n^p est le nombre d'arrangements de n éléments pris p à p.

A_n^p est aussi le nombre de p-listes d'éléments de F, distincts deux à deux.

C'est aussi le nombre de façons d'extraire p boules parmi n boules, sans remise et en tenant compte de l'ordre.

2.3 Permutations

Si E est un ensemble fini de cardinal n, toute application injective de E est bijective. On dit qu'il s'agit d'une permutation de E.

Il y a $n!$ permutations de E.

C'est aussi le nombre de listes ordonnées où tous les éléments de E figurent une fois, et une seule.

3. Nombre de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments

3.1 Dénombrement

Si $p \leqslant n$, le nombre de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments est noté $\binom{n}{p}$.

On l'appelle le nombre de combinaisons de n éléments pris p à p. On a :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$

C'est aussi le nombre de façons d'extraire p boules parmi n boules, en vrac et toutes distinctes.

3.2 Propriétés

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \quad ; \quad \binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1} \quad ; \quad \binom{n}{p} = \frac{n-p+1}{p}\binom{n}{p-1}.$$

Le nombre total de parties d'un ensemble à n éléments étant 2^n, on a :

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n.$$

La relation $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$ permet de construire le triangle de Pascal.

43 Groupes

1re année

1. Lois de composition interne

1.1 Définition

Une loi de composition interne sur un ensemble E est une application de $E \times E$ dans E.

À un couple (x, y), on associe donc un élément, noté $x * y$, ou $x + y$, ou xy, ..., appelé composé de x et de y.

1.2 Propriétés

• Une loi de composition interne $*$ sur E est :

– associative si :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \forall z \in E \qquad (x * y) * z = x * (y * z) \ ;$$

– commutative si :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \qquad x * y = y * x \, .$$

Elle admet un élément neutre e si :

$$\forall x \in E \qquad x * e = e * x = x \ .$$



Attention, e ne dépend pas de x.

Si l'élément neutre existe, il est unique.

• Un élément x est inversible, ou symétrisable, s'il existe x' tel que :

$$x * x' = x' * x = e \, .$$

x' est dit alors inverse, ou symétrique, de x.

• Si $*$ et $\top$ sont deux lois de composition interne de E, on dit que $*$ est distributive par rapport à $\top$, si l'on a toujours :

$$x * (y \top z) = (x * y) \top (x * z) \qquad \text{et} \qquad (y \top z) * x = (y * x) \top (z * x) \, .$$

2. Groupes

2.1 Définitions

Un ensemble non vide G, muni d'une loi de composition interne $*$, est un groupe si

– la loi est associative ;

– il existe un élément neutre e ;

– tout élément de G possède un symétrique dans G.

Si, de plus, la loi est commutative, on dit que le groupe est commutatif, ou abélien.

Dans un groupe, tout élément est régulier (ou simplifiable), c'est-à-dire que l'on a toujours :

$$x * y = x * z \Longrightarrow y = z \quad ; \quad y * x = z * x \Longrightarrow y = z\,.$$

Généralement, un groupe est noté additivement ou multiplicativement. Le symétrique x' de x est alors noté $-x$ dans le premier cas, x^{-1} dans le second.

2.2 Sous-groupes

Une partie stable H d'un groupe G est un sous-groupe de G si la restriction à H de la loi de G y définit une structure de groupe.

Pour qu'une partie non vide H d'un groupe G soit un sous-groupe de G, il faut et il suffit que :

$$\begin{cases} \forall x \in H \qquad \forall y \in H \qquad xy \in H; \\ \forall x \in H \qquad x^{-1} \in H. \end{cases}$$

ou encore :

$$\forall x \in H \qquad \forall y \in H \qquad xy^{-1} \in H.$$

Les sous-groupes du groupe additif $\mathbb{Z}$ sont les ensembles :

$$n\mathbb{Z} = \{nx \; ; \; x \in \mathbb{Z}\} \qquad \text{où} \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

L'intersection d'une famille de sous-groupes est un sous-groupe de G.



Attention, la réunion de deux sous-groupes de G n'est un sous-groupe de G que si l'un est inclus dans l'autre.

2.3 Morphismes de groupes

- **Définitions**

Soit G et G' deux groupes notés multiplicativement. Une application f, de G dans G', est un morphisme de groupes si, et seulement si,

$$\forall x \in G \qquad \forall y \in G \qquad f(x\,y) = f(x)\,f(y)\,.$$

Si, de plus, f est bijective, on dit que f est un isomorphisme de groupes. Les deux groupes sont alors isomorphes.

- **Composition**

Le composé de deux morphismes (resp. isomorphismes) de groupes est un morphisme (resp. isomorphisme) de groupes.

- **Noyau et image**

Soit G et G' deux groupes notés multiplicativement, d'éléments neutres respectifs e et e', et f un morphisme de G dans G'. On a :

$$e' = f(e) \quad ; \quad f(x^{-1}) = \left[f(x)\right]^{-1}.$$

$f(G)$ est un sous-groupe de G' appelé image de f et noté $\operatorname{Im} f$.

$N = \overset{-1}{f}(\{e'\}) = \{x\ ;\ x \in G, f(x) = e'\}$ est un sous-groupe de G que l'on appelle le noyau du morphisme f. On le note $\operatorname{Ker} f$.

f est injectif si, et seulement si, $\operatorname{Ker} f = \{e\}$.

3. Groupe symétrique PSI

Soit E un ensemble fini à n éléments , avec $n \geqslant 1$.

3.1 Définition

L'ensemble $\mathcal{S}(E)$ des bijections de E, muni de la loi de composition des applications, est un groupe appelé groupe des permutations (ou substitutions) de E.

$\mathcal{S}(E)$ est isomorphe à $\mathcal{S}_n$, groupe des permutations de l'intervalle $[\![1,n]\!]$ de $\mathbb{N}$, appelé groupe symétrique d'ordre n.

3.2 Décomposition d'une permutation en produit de cycles

- **Définition**

Un cycle (ou permutation circulaire) d'ordre p est une permutation σ de E qui laisse invariants $n - p$ éléments de E, et telle que l'on puisse ranger les p éléments restants $(a_1,\ldots,a_p)$ de manière que :

$$\sigma(a_1) = a_2 \ , \ \sigma(a_2) = a_3 \ , \ \ldots \ , \ \sigma(a_{p-1}) = a_p \ , \ \sigma(a_p) = a_1 \, .$$

On note $\sigma = (a_1,\ldots,a_p)$.

- **Théorème**

Tout permutation de E est décomposable en produit de cycles disjoints, deux cycles quelconques étant permutables.

3.3 Signature d'une permutation

- **Transposition**

On appelle transposition de E une permutation de E qui échange deux éléments de E, et qui laisse invariants tous les autres. C'est donc un cycle d'ordre 2.

- **Parité d'une permutation**

Toute permutation de E est décomposable en un produit de transpositions. Cette décomposition n'est pas unique, mais, pour une permutation donnée, la parité du nombre de transpositions est fixe.

Si ce nombre est pair, on dit que la permutation est paire.

Si ce nombre est impair, on dit que la permutation est impaire.

- **Signature**

La signature d'une permutation σ est le nombre, noté $\varepsilon(\sigma)$, égal à 1 si σ est paire, à -1 si σ est impaire.

Pour déterminer $\varepsilon(\sigma)$, la méthode la plus rapide consiste à décomposer σ en produit de cycles, en sachant qu'un cycle d'ordre p peut se décomposer en $p-1$ transpositions.

3.4 Groupe alterné

On a toujours $\varepsilon(\sigma \circ \sigma') = \varepsilon(\sigma) \times \varepsilon(\sigma')$.

Cette propriété signifie que l'application $\sigma \mapsto \varepsilon(\sigma)$ est un morphisme de $\mathcal{S}_n$ dans le groupe multiplicatif $\{-1,1\}$.

Le noyau de ce morphisme est l'ensemble des permutations paires. C'est un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$ appelé groupe alterné, et noté $\mathcal{A}_n$.

44 Autres structures algébriques

1re année

1. Anneaux et corps

1.1 Structure d'anneau

• **Définition**

Un ensemble A, muni d'une loi notée $+$ (dite addition) et d'une loi notée $\times$ (dite multiplication), possède une structure d'anneau pour ces opérations si :

– A possède une structure de groupe commutatif pour l'addition ;

– la multiplication est associative et possède un élément neutre ;

– la multiplication est distributive à gauche et à droite par rapport à l'addition.

Si la multiplication est commutative, l'anneau est dit commutatif.

• **Règles de calcul**

$$x\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} x\, y_i \quad ; \quad \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i\Big)x = \sum_{i=1}^{n} y_i\, x\,.$$

Dans un anneau commutatif, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k} \qquad \text{(formule du binôme)},$$

$$x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1} y^k\,.$$



Si l'anneau n'est pas commutatif, ces formules restent vraies pour des éléments permutables, c'est-à-dire tels que $xy = yx$.

1.2 Sous-anneau

On dit qu'une partie B d'un anneau A, stable pour $+$ et $\times$, est un sous-anneau de A, si la restriction à B des deux lois de A y définit une structure d'anneau, avec le même élément neutre pour $\times$ que dans A.

Pour qu'une partie B d'un anneau A soit un sous-anneau de A, il faut et il suffit que $1_A \in B$ et :

$$\forall x \in B \quad \forall y \in B \qquad x - y \in B \quad \text{et} \quad xy \in B.$$

1.3 Morphismes d'anneaux

A et B étant deux anneaux, une application f, de A dans B, est un morphisme d'anneaux si l'on a toujours :

$$f(x+y) = f(x) + f(y)\ ;\ f(xy) = f(x)\,f(y)\ ;\ f(1_A) = 1_B\,.$$

1.4 Structure de corps

- **Éléments inversibles d'un anneau**

Si A est un anneau non réduit à $\{0\}$, l'ensemble de ses éléments inversibles (c'est-à-dire les éléments qui admettent un symétrique pour la multiplication) est un groupe multiplicatif.

- **Corps**

Un corps est un anneau non réduit à $\{0\}$ dont tous les éléments, sauf 0, sont inversibles. Il est dit commutatif si l'anneau est commutatif.

Dans cet ouvrage, tous les corps seront supposés commutatifs, sans avoir besoin de le préciser à chaque fois.

- **Sous-corps**

On dit qu'une partie L d'un corps K, stable pour $+$ et $\times$, est un sous-corps de K, si la restriction à L des deux lois de K y définit une structure de corps, c'est-à-dire si c'est un sous-anneau, et si l'inverse d'un élément non nul de L reste dans L.

Pour qu'une partie non vide L d'un corps K soit un sous-corps de K, il faut et il suffit que $1 \in L$ et que :

$$\begin{cases} \forall x \in L \quad \forall y \in L \qquad x - y \in L \quad \text{et} \quad xy \in L \\ \forall x \in L^* \qquad x^{-1} \in L^* \qquad\qquad \text{où } L^* = L \setminus \{0\} \end{cases}$$

1.5 Anneau intègre

Lorqu'il existe, dans un anneau, des éléments a et b tels que

$$a \neq 0 \quad \text{et} \quad b \neq 0 \quad \text{et} \quad ab = 0\,,$$

on dit que a et b sont des *diviseurs de zéro*.

Un anneau intègre est un anneau commutatif, non réduit à $\{0\}$, et sans diviseur de zéro.

Pour qu'un anneau commutatif, non réduit à $\{0\}$, soit intègre, il faut et il suffit que tout élément non nul soit simplifiable pour la multiplication.

2. Espaces vectoriels et algèbres

2.1 Espace vectoriel

Voir fiche 52.

2.2 Algèbre

• **Définition**

On dit qu'un ensemble E est une algèbre sur un corps K, ou K-algèbre, s'il est muni de deux lois internes, notées $+$ et $\times$, et d'une loi externe sur K, notée ., avec les propriétés :

$(E,+,.)$ est un K-espace vectoriel,

$(E,+,\times)$ est un anneau.

$\forall \lambda \in K \quad \forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \lambda\,(x\,y) = (\lambda\,x)\,y = x\,(\lambda\,y)\,.$

L'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni des opérations $f+g$, fg, λf, est une algèbre sur $\mathbb{R}$.

• **Sous-algèbre**

Une partie d'une algèbre, stable pour les trois lois, est une sous-algèbre si elle possède une structure d'algèbre pour la restriction des lois de l'algèbre, c'est-à-dire si c'est à la fois un sous-espace vectoriel et un sous-anneau.

• **Morphismes**

E et F étant deux algèbres, une application f, de E dans F, est un morphisme d'algèbre si elle transporte les trois lois, c'est-à-dire si l'on a toujours :

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \ ; \ f(xy) = f(x)f(y) \ ; \ f(\lambda x) = \lambda f(x)\,.$$

et si $f(1_E) = 1_F$.

Un morphisme f de E dans F est

un isomorphisme si f est bijectif,

un endomorphisme si $E = F$,

un automorphisme si $E = F$ et f bijectif.

Nombres complexes 45

1re année

1. Forme algébrique

1.1 Définitions

Tout nombre complexe z s'écrit, de manière unique, sous la forme algébrique $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels, i étant un nombre complexe particulier tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.

Le réel x s'appelle la partie réelle de z, et se note Re (z).

Le réel y s'appelle la partie imaginaire de z, et se note Im (z).

Si $y = 0$, alors z est réel, d'où $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Si $x = 0$, alors z est un imaginaire pur.



En électricité, on note $z = x + \mathrm{j}y$ pour ne pas confondre avec la notation d'une intensité.

1.2 Égalité

Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.



Attention, il n'y a pas d'inégalités dans $\mathbb{C}$. N'écrivez jamais qu'un nombre complexe est positif, ou négatif. Cela n'aurait aucun sens.

1.3 Opérations dans $\mathbb{C}$

Soit $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$. On définit l'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ par :

$$z + z' = (x + x') + \mathrm{i}\,(y + y') \quad ; \quad z\,z' = (xx' - yy') + \mathrm{i}\,(xy' + x'y)\,.$$

Pour ces deux opérations, $\mathbb{C}$ est un corps.

1.4 Plan complexe

Soit $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un repère orthonormal du plan.

L'application qui, à tout nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$, fait correspondre le point M de coordonnées (x, y) est une bijection. M est l'image de z, et z l'affixe de M.

L'affixe du vecteur $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$ est le nombre complexe $z = \alpha + \mathrm{i}\beta$.

Si z_A et z_B sont les affixes de A et B, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.
La somme des nombres complexes correspond à l'addition des vecteurs.

1.5 Conjugué d'un nombre complexe

- **Définition**

Le conjugué du nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ est le nombre complexe $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$.



Attention, vérifiez bien que x et y sont réels.

- **Images**

Les images des nombres complexes z et $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

- **Propriétés**

$$\overline{\overline{z}} = z \quad ; \quad \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \quad ; \quad \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'} \quad ; \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}.$$

$z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\,(z)$; z est imaginaire pur si, et seulement si, $z = -\overline{z}$.
$z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,(z)$; z est réel si, et seulement si, $z = \overline{z}$.

- **Application au calcul de $\dfrac{1}{z}$**

Comme $z\overline{z} = x^2 + y^2$ est réel, on obtient la forme algébrique de $\dfrac{1}{z}$, ou de $\dfrac{z_1}{z_2}$, en multipliant le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

2. Forme trigonométrique

2.1 Module d'un nombre complexe

- **Définition**

Le module de $z = x + \mathrm{i}y$ (où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$) est le nombre réel positif $\sqrt{z\,\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$. On le note $|z|$, ou ρ, ou r.
Si M est l'affixe de z, $|z|$ est la longueur OM.

- **Propriétés**

Le module d'un nombre complexe a les mêmes propriétés que la valeur absolue d'un nombre réel.

$$|z| = 0 \iff z = 0 \ ; \ |\mathrm{Re}\,(z)| \leqslant |z| \quad ; \quad |\mathrm{Im}\,(z)| \leqslant |z| \ ;$$

$$\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z - z'| \leqslant |z| + |z'| \ ;$$

$$|zz'| = |z||z'| \ ; \ |z^n| = |z|^n \ \text{pour} \ n \in \mathbb{N} \ ; \ \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \ \text{si} \ z' \neq 0\,.$$

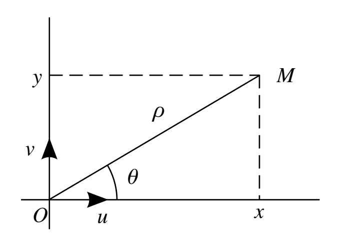
2.2 Forme trigonométrique

Tout nombre complexe non nul z s'écrit sous forme trigonométrique :

$z = \rho\,(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \qquad \text{avec} \quad \rho > 0\,.$

$\rho = |z|$ est le module de z.

θ est un argument de z. On le note $\arg z$. Il est défini, modulo 2π, par :



$$\cos\theta = \frac{x}{\rho} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{y}{\rho}\cdot$$

2.3 Propriétés de l'argument d'un nombre complexe non nul

Les égalités suivantes ont lieu à $2k\pi$ près (avec $k \in \mathbb{Z}$) :

$$\arg\,(zz') = \arg z + \arg z' \quad ; \quad \arg\,(z^n) = n \arg z \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{Z}\ ;$$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z \quad ; \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'\,.$$

46 Exponentielle complexe

1re année

1. Exponentielle complexe

1.1 Nombres complexes de module 1

L'ensemble U des nombres complexes de module 1 est un groupe multiplicatif. Son image dans le plan complexe est le cercle trigonométrique.

Soit $z \in U$. Si θ est un argument de z, on a $z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.

On convient de noter $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

L'application $\theta \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est un morphisme surjectif du groupe additif $\mathbb{R}$ sur le groupe multiplicatif U. Son noyau est $2\pi\mathbb{Z}$.

1.2 Formule de Moivre

$$\forall\theta \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \qquad (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta\,,$$

ce qui s'écrit avec la notation précédente : $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$.

1.3 Formules d'Euler

Pour tout réel x et tout entier n, on a :

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} \quad ; \quad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} \; ;$$

$$\cos nx = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}}{2} \quad ; \quad \sin nx = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}}{2\mathrm{i}}.$$



On peut utiliser ces formules pour linéariser des polynômes trigonométriques.

1.4 Exponentielle complexe

- **Définition**

On définit l'exponentielle du nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ par :

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{iy} = \mathrm{e}^x\,(\cos y + \mathrm{i}\sin y)\,.$$

L'application, de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, $z \mapsto \mathrm{e}^z$ est un morphisme surjectif. Son noyau est $2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z}$.

• **Équation** $e^z = a$

Le nombre complexe e^z a pour module e^x, et pour argument y.

Si a est un nombre complexe non nul donné, les solutions $z = x + iy$ de l'équation $e^z = a$ vérifient donc :

$$e^x = |a| \quad \text{et} \quad y = \arg(a)\,.$$

• **Propriétés**

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad \forall z' \in \mathbb{C} \qquad e^z\, e^{z'} = e^{z+z'}\ ;$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad \forall n \in \mathbb{Z} \qquad \left(e^z\right)^n = e^{nz}\,.$$

Si z est une constante complexe et t une variable réelle, on a :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(e^{zt}\right) = z\, e^{zt}\,.$$

2. Racines n-ièmes d'un nombre complexe

2.1 Racines n-ièmes de l'unité

Soit U_n l'ensemble des racines n-ièmes de 1, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes z tels que $z^n = 1$. On a :

$$U_n = \{u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}\} \quad \text{avec} \quad u_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = (u_1)^k$$

Propriété

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = 0\,.$$

2.2 Racines n–ièmes d'un nombre complexe non nul

Tout nombre complexe non nul $a = \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ possède n racines n-ièmes :

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad \text{avec} \quad k \in \{0, \ldots, n-1\}\,.$$

À partir de l'une d'entre elles, on peut les obtenir toutes en la multipliant par les éléments de U.

2.3 Cas particulier des racines carrées

Pour déterminer les racines carrées de $z = a + \mathrm{i}b$, il est plus commode de procéder par identification, c'est-à-dire de chercher les réels α et β tels que $(\alpha + \mathrm{i}\beta)^2 = a + \mathrm{i}b$.

L'égalité des parties réelles et des parties imaginaires donne :

$$\alpha^2 - \beta^2 = a \qquad \text{et} \qquad 2\alpha\,\beta = b\,.$$

L'égalité des modules conduit à :

$$\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\,.$$

On en déduit α^2 et β^2, puis α et β en utilisant le fait que $\alpha\,\beta$ est du signe de b.



Ce calcul est utilisé lors de la résolution d'une équation du second degré à coefficients complexes.

Nombres complexes et géométrie plane

47

1re année

$a = a_1 + \mathrm{i}a_2$ et $b = b_1 + \mathrm{i}b_2$ sont deux nombres complexes donnés.

1. Transformations géométriques

- L'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$: $z \mapsto z + b$, se traduit sur les images par la translation de vecteur $b_1\overrightarrow{u} + b_2\overrightarrow{v}$.
- Si $a \neq 1$, l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$: $z \mapsto az + b$, se traduit sur les images par la similitude de rapport $|a|$, d'angle $\arg\ a$, et dont le centre Ω, a pour affixe $z_\Omega = \dfrac{b}{1-a}$.

Cette transformation est la composée, dans n'importe quel ordre, de la rotation de centre ω et d'angle $\arg\ a$, et de l'homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$.

2. Distances et angles

- Soit A et B deux points distincts, d'affixes respectifs z_A et z_B.

$|z_A - z_B|$ est la longueur AB ; $\arg\ (z_B - z_A)$ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB})$.

- Soit A, B et C trois points, deux à deux distincts, d'affixes respectifs z_A, z_B, z_C.

$\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ a pour module $\dfrac{AB}{AC}$, et pour argument une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$.

3. Applications

- Les points A, B et C sont alignés si, et seulement si, $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ est un réel.
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ est un imaginaire pur.

- Le triangle ABC est équilatéral, de sens direct, si, et seulement si, $z_C - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A)$.
- Le triangle ABC est isocèle et rectangle en A si, et seulement si, $z_C - z_A = \pm i\,(z_B - z_A)$.
- Soit A, B, C et D quatre points, deux à deux distincts, d'affixes respectifs z_A, z_B, z_C, z_D. Ils sont cocycliques ou alignés si, et seulement si, $\left(\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right)/\left(\dfrac{z_B - z_D}{z_A - z_D}\right)$ est réel.

Polynômes 48

1re année

1. Polynômes à une indéterminée

1.1 Définitions

Un polynôme à une indéterminée, à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$, est une suite de valeurs a_i de $\mathbb{K}$, nulle à partir d'un certain rang p. Un tel polynôme se note P, ou $P(X)$:

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_p X^p .$$

Les nombres a_i sont les coefficients du polynôme P.

Si $P \neq 0$, le plus grand entier p tel que $a_p \neq 0$ est le degré du polynôme P. On le note $d^\circ P$, ou deg P.

a_p est le coefficient dominant de P. Lorsque $a_p = 1$, le polynôme est dit unitaire, ou normalisé.

Pour le polynôme nul $P = 0$, on convient de poser $d^\circ P = -\infty$.

L'ensemble des polynômes à une indéterminée X, à coefficients dans $\mathbb{K}$, se note $\mathbb{K}[X]$.

On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

1.2 Structure algébrique

Soit $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $Q = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j$ deux éléments de $\mathbb{K}[X]$, et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- **Addition de deux polynômes**

$P + Q = \sum_{k=0}^{r} c_k X^k$ avec $r = \max(m,n)$ et $c_k = a_k + b_k$.

On a : $d^\circ(P+Q) \leqslant \max(d^\circ P, d^\circ Q)$. Si $d^\circ P \neq d^\circ Q$, il y a égalité.

- **Produit par un scalaire**

$\lambda P = \sum_{i=0}^{n} (\lambda a_i) X^i$. Si $\lambda \neq 0$, on a : $d^\circ(\lambda P) = d^\circ P$.

- **Produit de deux polynômes**

$$PQ = \sum_{k=0}^{m+n} d_k\, X^k \text{ avec } d_k = \sum_{i+j=k} a_i\, b_j\,.$$

On a : $\mathrm{d}^\circ(PQ) = \mathrm{d}^\circ P + \mathrm{d}^\circ Q$.

Pour les trois lois précédentes, $\mathbb{K}[X]$ est une algèbre sur $\mathbb{K}$.

Les seuls éléments inversibles sont les polynômes constants non nuls.

$\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$, de dimension $n+1$.

- **Composé de deux polynômes**

Le polynôme composé de P et Q est : $P \circ Q = \sum_{i=0}^{n} a_i\, Q^i$.

On a $\mathrm{d}^\circ(P \circ Q) = \mathrm{d}^\circ P \times \mathrm{d}^\circ Q$.

On écrit souvent $P\,(Q)$ au lieu de $P \circ Q$.

1.3 Fonctions polynomiales

$P = \sum_{i=0}^{n} a_i\, X^i$ étant un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, la fonction polynomiale associée à P est l'application $\tilde{P}$, de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$, définie par :

$$x \mapsto \tilde{P}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i\,.$$



Si $\mathbb{K}$ est infini, vous pouvez confondre sans risque P et $\tilde{P}$. Ce n'est pas le cas si $\mathbb{K}$ est fini.

1.4 Divisibilité

Si $A = B\,Q$ (avec $Q \in \mathbb{K}[X]$), on dit que A est un multiple de B, ou que B est un diviseur de A.

On dit que A et B sont des polynômes associés lorsque $A = \lambda\, B$, avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

1.5 Division euclidienne

Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, avec $B \neq 0$. Il existe des polynômes uniques Q et R dans $\mathbb{K}[X]$, tels que :

$$A = BQ + R \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{d}^\circ R < \mathrm{d}^\circ B\,.$$

On dit que Q est le quotient, et R le reste, dans la division euclidienne de A par B.

1.6 Polynôme dérivé

La définition et les propriétés du polynôme dérivé sont analogues à celles de la fonction associée.

2. Racines d'un polynôme

2.1 Définition et caractérisation

Une équation algébrique est de la forme $\tilde{P}(x) = 0$ où P est un polynôme. Ses racines sont les zéros, ou racines, de P.

Un zéro α de P est dit d'ordre k, ou de multiplicité k (avec $k \in \mathbb{N}^*$), si α est racine d'ordre k de l'équation $\tilde{P}(x) = 0$. Cela signifie qu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)^k Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, un zéro α de P est d'ordre au moins k si, et seulement si :

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0\,.$$

L'ordre est égal à k si, en plus, $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

2.2 Théorème de d'Alembert-Gauss

Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

On en déduit qu'un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, de degré n, a exactement n racines dans $\mathbb{C}$, en comptant chaque racine autant de fois que son ordre de multiplicité.

2.3 Polynôme irréductible

Un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est irréductible si $d^\circ P \geqslant 1$, et s'il n'est divisible que par les polynômes associés à 1 ou à P.

2.4 Polynôme scindé

Un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est scindé s'il s'écrit comme produit de polynômes de degré 1, soit :

$$P = a_n \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{k_i}\,.$$

2.5 Relations entres les coefficients et les racines

Si $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ est de la forme ci-dessus, désignons par σ_p la somme des produits p à p des racines. On a la relation :

$$\sigma_p = (-1)^p \frac{a_{n-p}}{a_n}.$$

2.6 Décomposition d'un polynôme

Tout polynôme de degré $\geqslant 1$ se factorise en un produit d'un élément de $\mathbb{K}^*$ et de polynômes irréductibles unitaires.

Cette décomposition est unique, à l'ordre des facteurs près.

Dans $\mathbb{C}[X]$, les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1.

Dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1, et les polynômes $aX^2 + bX + c$ avec $b^2 - 4ac < 0$.

Si $P \in \mathbb{R}[X]$, on peut le considérer dans $\mathbb{C}[X]$, et si α est un zéro non réel de P, alors P admet aussi le conjugué $\overline{\alpha}$ pour zéro, avec le même ordre de multiplicité que α.

2.7 Polynôme d'interpolation de Lagrange

Soit $(a_0,a_1,\ldots,a_n)$ des éléments de $\mathbb{K}$, distincts deux à deux et des éléments $(b_0,b_1,\ldots,b_n)$ de $\mathbb{K}$.

Il existe un unique polynôme P de degré $\leqslant n$ tel que :

$$\forall i \in \{0,\ldots,n\} \qquad P(a_i) = b_i\,.$$

Ce polynôme est $$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\prod_{j\neq i}(X - a_j)}{\prod_{j\neq i}(a_i - a_j)}\, b_i\,.$$

Fractions rationnelles 49

1[re] année

Le programme réserve en principe ce chapitre à la section MPSI, mais il est utile à tous pour le calcul des primitives et pour l'utilisation dans d'autres disciplines, comme la SI.

1. Décomposition en éléments simples

1.1 Définitions

- De façon analogue à un nombre rationnel quotient de deux entiers, on définit une fraction rationnelle $\frac{A}{B}$ à partir des polynômes A et $B \neq 0$.
- On appelle degré de la fraction rationnelle $F = \frac{A}{B}$, le nombre $\mathrm{d}^\circ A - \mathrm{d}^\circ B$. On le note $\mathrm{d}^\circ F$.
- $F = \frac{A}{B}$ étant une fraction rationnelle simplifiée, la fonction rationnelle associée à F est la fonction $\tilde{F}$, de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$, définie par :

$$x \mapsto \tilde{F}(x) = \frac{\tilde{A}(x)}{\tilde{B}(x)} \quad \text{quand} \quad \tilde{B}(x) \neq 0\,.$$

$\tilde{F}$ n'est pas définie pour les zéros de B. Ce sont les pôles de F.

1.2 Forme générale de la décomposition

Une fraction rationnelle, de forme irréductible $F = \frac{A}{B}$ (c'est-à-dire avec A et B premiers entre eux), s'écrit de façon unique, sous la forme :

$$F = E + \frac{R}{B} \quad \text{avec} \quad \mathrm{d}^\circ R < \mathrm{d}^\circ B\,.$$

E est la partie entière, et $\frac{R}{B}$ la partie fractionnaire de F.

1.3 Partie polaire quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Si la factorisation de B en polynômes irréductibles comporte un terme $(X-a)^k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, on appelle partie polaire de F relative à ce terme une somme d'éléments simples du type :

$$\frac{\alpha_k}{(X-a)^k} + \frac{\alpha_{k-1}}{(X-a)^{k-1}} + \cdots + \frac{\alpha_1}{X-a}.$$

Pour une fraction F donnée, les complexes α_i existent et sont uniques.

1.4 Théorème de décomposition

Toute fraction rationnelle, écrite sous forme irréductible, est égale, de façon unique, à la somme de sa partie entière et des parties polaires relatives à chacun des facteurs irréductibles intervenant dans la décomposition de B.

2. Méthodes pratiques de décomposition

2.1 Plan d'étude

- On met F sous forme irréductible en simplifiant par le PGCD du numérateur et du dénominateur.
- On obtient E et R à l'aide de la division euclidienne de A par B.
- On factorise B en polynômes irréductibles.
- On écrit la forme littérale de la décomposition en éléments simples de F, ou de $\dfrac{R}{B}$.
- On détermine les coefficients à l'aide de diverses méthodes.

2.2 Détermination des coefficients

- La méthode la plus rudimentaire consiste à réduire au même dénominateur la forme décomposée, et à identifier les numérateurs.
- Vous pouvez remplacer X par des valeurs numériques, différentes des pôles.
- Sachant que la décomposition est unique, si F est paire, ou impaire, on obtient des relations entre les coefficients.
- En utilisant la fraction sans partie entière, $\lim\limits_{x\to\infty} x\,F(x)$ donne une relation entre coefficients.
- En multipliant F par $(X-a)^k$ et en remplaçant X par a, on obtient α_k.

- Si a est un pôle simple, la partie polaire associée $\dfrac{\alpha}{X-a}$ vérifie :

$$\alpha = \frac{A(a)}{B'(a)}\cdot$$

- Soit P un polynôme dont les racines sont $a_1,\ldots,a_k$, d'ordre de multiplicité respectifs $m_1,\ldots,m_k$.

On a :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{X-a_i}\cdot$$

Partie 4

Algèbre linéaire et multilinéaire

50 Structure d'espace vectoriel

1re année et 2e année

1. Définitions et premières propriétés

1.1 Espace vectoriel

Soit $\mathbb{K}$ un corps d'éléments neutres notés 0 et 1.

On dit qu'un ensemble non vide E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel, s'il est muni

- d'une loi de composition interne notée $+$,
- d'une loi de composition externe sur $\mathbb{K}$, c'est-à-dire d'une application de $\mathbb{K} \times E$ dans E : $(\lambda,x) \mapsto \lambda\, x$,

telles que :

$(E,+)$ est un groupe commutatif,

$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall \mu \in \mathbb{K} \quad \forall x \in E \quad \forall y \in E \qquad (\lambda\, \mu)\, x = \lambda\, (\mu\, x) \quad ;$

$$(\lambda + \mu)\, x = \lambda\, x + \mu\, x \quad ; \quad \lambda\, (x + y) = \lambda\, x + \lambda\, y \quad ; \quad 1\, x = x.$$

Les éléments de E sont des vecteurs ; les éléments de $\mathbb{K}$ sont des scalaires.

1.2 Exemples

- L'ensemble des vecteurs du plan ou de l'espace est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
- $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, mais aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- Le produit $E_1 \times \cdots \times E_n$ de n espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois :

$$(x_1,\ldots,x_n) + (y_1,\ldots,y_n) = (x_1 + y_1,\ldots,x_n + y_n)$$
$$\lambda\, (x_1,\ldots,x_n) = (\lambda\, x_1,\ldots,\lambda\, x_n)$$

- L'ensemble $\mathcal{F}(X,F)$ des applications d'un ensemble X dans un espace vectoriel F, est un espace vectoriel pour les opérations $f + g$ et λf.
- L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, l'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré $\leqslant n$, sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1.3 Propriété

$$\forall\lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in E \qquad \lambda x = 0_E \Longleftrightarrow \lambda = 0_K \text{ ou } x = 0_E .$$

De ce fait, les éléments neutres de $\mathbb{K}$ et de E, 0_K et 0_E, seront représentés par le même symbole 0 sans inconvénient.

2. Sous-espaces vectoriels

2.1 Définition

Une partie non vide F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E si elle est stable pour les deux lois, et si la restriction à F des lois de E y définit une structure d'espace vectoriel.

En fait, il faut et il suffit que F vérifie :

$$\forall\lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in F \quad \forall y \in F \qquad x + y \in F \qquad \lambda x \in F \ ;$$

ou encore :

$$\forall\lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in F \quad \forall y \in F \qquad x + \lambda y \in F .$$



Pour montrer que F n'est pas vide, on vérifie en général que $0 \in F$.

2.2 Sous-espace engendré par une partie

- Toute intersection de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.



Attention, la réunion de sous-espaces vectoriels n'est pas en général un sous-espace vectoriel.

- L'intersection F de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant une partie A donnée est le sous-espace vectoriel engendré par A. C'est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel contenant A.

  On dit aussi que A est une partie génératrice de F. On note $F = \text{Vect}(A)$.
- Le sous-espace vectoriel engendré par A est égal à l'ensemble des combinaisons linéaires finies de vecteurs de A, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs du type :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall i \quad \lambda_i \in \mathbb{K} \quad x_i \in A .$$

2.3 Somme de deux sous-espaces vectoriels

E_1 et E_2 étant deux sous-espaces vectoriels de E, on appelle somme de E_1 et de E_2, et on note $E_1 + E_2$, l'ensemble des vecteurs du type $x_1 + x_2$ où $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$.

$E_1 + E_2$ est le sous-espace vectoriel engendré par $E_1 \cup E_2$.

2.4 Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

• **Définitions**

Quand tout vecteur x de $F = E_1 + E_2$ s'écrit, de façon unique, sous la forme $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$, on dit que F est somme directe de E_1 et de E_2, et on note $F = E_1 \oplus E_2$.

On dit aussi que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans F.

• **Théorème**

$$E = E_1 \oplus E_2 \iff E = E_1 + E_2 \text{ et } E_1 \cap E_2 = \{0\}\,.$$

2.5 Généralisation

• **Somme de sous-espaces vectoriels**

Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

On appelle somme des E_i, et on note $\sum_{i \in I} E_i$, l'ensemble des vecteurs du type $\sum_{i \in I} x_i$ où $x_i \in E_i$ pour tout $i \in I$.

$\sum_{i \in I} E_i$ est le sous-espace vectoriel engendré par $\bigcup_{i \in I} E_i$.

Si $I = \{1,\ldots,n\}$, la somme se note aussi $E_1 + \cdots + E_n$.

• **Somme directe de sous-espaces vectoriels**

Quand tout vecteur x de $\sum_{i \in I} E_i$ s'écrit de façon unique sous la forme $\sum_{i \in I} x_i$ avec $x_i \in E_i$ pour tout $i \in I$, on dit que la somme des E_i est directe et on la note $\bigoplus_{i \in I} E_i$.

Si $I = \{1,\ldots,n\}$, on note aussi $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$.



Pour démontrer que la somme des E_i est directe, la méthode la plus rapide est de partir d'une somme nulle $x_1 + \cdots + x_n = 0$ avec $x_i \in E_i$ pour tout i, et de démontrer que cela entraîne que tous les x_i sont nuls.

Dimension d'un espace vectoriel

51

1[re] année
et
2[e] année

1. Espaces vectoriels de dimension finie

1.1 Dépendance et indépendance linéaire

- On dit qu'une famille $(x_1,\dots,x_n)$ de vecteurs de E est une famille libre, ou que les vecteurs sont linéairement indépendants, si :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i = 0 \Longrightarrow \quad \forall i \quad \lambda_i = 0\,.$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille est liée, ou que les vecteurs sont linéairement dépendants.

- Toute sous-famille non vide d'une famille libre est libre.
- Pour qu'une famille $(x_1,\dots,x_n)$ soit liée, il faut, et il suffit, que l'un de ses éléments soit combinaison linéaire des autres.



Cas particuliers : une famille qui contient le vecteur 0 est liée ; deux vecteurs sont liés si, et seulement si, ils sont colinéaires.

1.2 Bases

- On appelle base d'un espace vectoriel E toute famille libre de E qui engendre E.
- $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E si, et seulement si, tout vecteur x de E peut s'écrire de façon unique sous la forme :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i\,.$$

Les scalaires x_i sont les composantes du vecteur x.

- **Théorème de la base incomplète**

Si E est un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$, toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.

- Tout espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ possède au moins une base.



Attention à ne jamais dire *la* base de E, car il n'y a pas unicité.

1.3 Dimension d'un espace vectoriel

Si E possède une base comportant un nombre fini n de vecteurs, on dit que E est de dimension finie.

Dans ce cas, toute base de E comporte aussi n vecteurs. On dit que n est la dimension de E ; on la note $\dim E$.

On convient que l'espace vectoriel $\{0\}$ est de dimension nulle.

1.4 Recherche de bases

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

Toute famille libre de E a au plus n vecteurs. Si elle comporte n vecteurs, c'est une base.

Toute famille génératrice de E a au moins n vecteurs. Si elle comporte n vecteurs, c'est une base.



Si on connaît déjà la dimension n de E, et si on considère une famille de n vecteurs, pour démontrer que c'est une base, il suffit de démontrer : soit que la famille est libre, soit que la famille est génératrice.

2. Autres dimensions

2.1 Dimension de $E \times F$

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies.

Si $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base de E, et $(f_1,\ldots,f_p)$ une base de F, alors l'ensemble des couples $(e_i,0)$ et $(0,f_j)$ où $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, est une base de $E \times F$.

Par conséquent $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$.

2.2 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie, et

$$\dim F \leqslant \dim E.$$

D'autre part, si $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.



L'égalité des dimensions ne suffit pas pour conclure que $F = E$. Il faut aussi une inclusion.

Si $\dim F = \dim E - 1$, on dit que F est un hyperplan de E.



Comme exemples d'hyperplans, vous pouvez penser à une droite dans le plan ou à un plan dans l'espace.

2.3 Dimension d'une somme

- Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, on a :

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)\,.$$

En particulier, si F et G sont supplémentaires :

$$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G\,.$$

- Tout sous-espace vectoriel F de E admet des supplémentaires, qui ont tous pour dimension : $\dim E - \dim F$.
- F et G sont supplémentaires si, et seulement si, en réunissant une base de F et une base de G, on obtient une base de E.

On dit qu'on a choisi une base de E adaptée à la somme directe.



Attention à ne pas partir d'une base de E, car il n'y a aucune raison de pouvoir en extraire une base de F et une base de G, ni même des vecteurs de F ou de G.

- **Généralisation**

Si E est de dimension finie, on a :

$$\dim \bigoplus_{i \in I} E_i = \sum_{i \in I} \dim E_i\,.$$

Si la somme $\bigoplus_{i \in I} E_i$ est directe, alors, pour que $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$, il faut et il suffit que :

$$\dim E = \sum_{i \in I} \dim E_i\,.$$

Si aucun E_i n'est réduit à $\{0\}$, la réunion d'une base de chaque E_i constitue une base de E si, et seulement si, $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$.

2.4 Rang

Le rang d'une famille finie de vecteurs est la dimension du sous-espace vectoriel qu'ils engendrent.

C'est aussi le nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants que l'on peut extraire de la famille.

Applications linéaires

52

1re année et 2e année

Soit E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$.

1. Généralités

1.1 Définitions

Une application f de E dans F est dite linéaire si c'est un morphisme d'espaces vectoriels, c'est-à-dire si :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad f(x+y) = f(x) + f(y) \ ; \ f(\lambda x) = \lambda f(x) .$$

ou encore :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall \mu \in \mathbb{K} \qquad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) .$$

La propriété précédente s'étend à toute combinaison linéaire :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) .$$

Si f est bijective, c'est un isomorphisme ; si $E = F$, c'est un endomorphisme ; si f est bijective avec $E = F$, c'est un automorphisme.

On note :

$\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F,

$\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans E,

$\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

1.2 Opérations algébriques

La composée de deux applications linéaires est linéaire.

Si f est un isomorphisme, f^{-1} est aussi un isomorphisme.

$\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel.

Si $\dim E = n$ et $\dim F = p$, on a $\dim \mathcal{L}(E,F) = np$.

$\mathcal{L}(E)$ est une algèbre.

$(\mathrm{GL}(E), \circ)$ est un groupe, appelé groupe linéaire de E.

2. Noyau et image d'une application linéaire

2.1 Définitions

Soit f une application linéaire de E dans F.

• L'image d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F.

En particulier, $f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F appelé image de f, et noté $\mathrm{Im}\, f$. Il est engendré par les images des vecteurs d'une partie génératrice de E.

• L'image réciproque d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E.

En particulier, $\overset{-1}{f}(\{0\})$ est un sous-espace vectoriel de E. On l'appelle le noyau de f, et on le note $\mathrm{Ker}\, f$.

2.2 Théorème

$$f \text{ surjective} \iff \mathrm{Im}\, f = F \quad ; \quad f \text{ injective} \iff \mathrm{Ker}\, f = \{0\}.$$

2.3 Noyau d'une restriction

Soit f une application linéaire de E dans F et E_1 un sous-espace vectoriel de E.

La restriction de f à E_1 a pour noyau :

$$\mathrm{Ker}\big(f_{|E_1}\big) = \mathrm{Ker}\, f \cap E_1 .$$

La restriction de f à tout supplémentaire G de $\mathrm{Ker}\, f$ définit donc un isomorphisme de G sur $\mathrm{Im}\, f$.

2.4 Réflexe utile

$$f \circ g = 0 \iff \mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Ker}\, f .$$

3. Image d'une famille de vecteurs

Soit f une application linéaire de E dans F.

3.1 Image d'une famille génératrice

Si G engendre E, alors $f(G)$ engendre $f(E)$.

L'image d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F si, et seulement si, f est surjective.

3.2 Image d'une famille libre

Si A est une partie liée dans E, alors $f(A)$ est une partie liée dans F, ou, par contraposition :

$$f(A) \text{ libre dans } F \Longrightarrow A \text{ libre dans } E.$$

f est injective si, et seulement si, pour toute partie libre L de E, $f(L)$ est une partie libre de F.

3.3 Image d'une base

L'image d'une base de E est une base de F si, et seulement si, f est bijective.

4. Rang d'une application linéaire

4.1 Théorème noyau-image

Soit f une application linéaire de E dans F. Si $E = \operatorname{Ker} f \oplus G$, la restriction de f à G est un isomorphisme de G dans $\operatorname{Im} f$.

4.2 Théorème du rang

Si E est de dimension finie, on a :

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f.$$

$\dim \operatorname{Im} f$ est appelé rang de f, et souvent noté $\operatorname{rg} f$.

4.3 Théorème

Si E et F sont de même dimension finie, on a :

$$f \text{ bijective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ surjective}.$$



N'oubliez pas l'hypothèse sur E et F.

4.4 Forme linéaire et hyperplan PSI

- **Forme linéaire**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

L'ensemble des formes linéaires sur E est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$.

On l'appelle l'espace dual de E et on le note E^*.

Si E est de dimension finie, on a $\dim E = \dim E^*$.

- **Écriture d'une forme linéaire**

Si E est de dimension finie et admet $(e_1,\ldots,e_n)$ pour base, toute forme linéaire f sur E est de la forme :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i \mapsto f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x_i$$

où les $\alpha_i = f(e_i)$ sont des scalaires qui caractérisent f.

- **Forme linéaire et hyperplan**
  - Étant donnée une forme linéaire φ sur E non nulle, le sous-espace vectoriel $H = \operatorname{Ker} \varphi$ est un hyperplan de E.

Toute forme linéaire ψ nulle sur H est colinéaire à φ.

  - En dimension finie, un hyperplan admet donc une équation de la forme :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x_i = 0\,.$$

- **Base duale**

Soit $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ une base d'un espace vectoriel E de dimension finie. Les formes linéaires coordonnées $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ définies par

$$\forall i \quad \forall j \qquad \varphi_i(e_j) = \delta_i^j$$

constituent une base $\mathcal{B}^*$ de E^* appelée base duale de $\mathcal{B}$.



Le symbole de Kronecker δ_i^j vaut 1 si $i = j$ et 0 si $i \neq j$.

On a donc $\quad \dim E = \dim E^*$.

5. Détermination d'une application linéaire

- Soit $A = (a_1,\ldots,a_n)$ une base de E et $B = (b_1,\ldots,b_n)$ une famille de n vecteurs de F.

Il existe une application linéaire unique f de E dans F telle que :

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\} \qquad f(a_i) = b_i\,.$$

- On a : f injective $\iff B$ libre dans F ;

  f surjective $\iff B$ engendre F ;

  f bijective $\iff B$ est une base de F.

- **Conséquence** : deux espaces vectoriels E et F de dimensions finies sont isomorphes si, et seulement si, $\dim E = \dim F$.

53 Applications linéaires particulières

1re année

1. Homothétie

Soit $k \in K^*$. L'homothétie de rapport k est l'application :

$$h_k : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \mapsto & kx \end{array}$$



Dans cette définition, n'oubliez pas que k ne dépend pas de x.

2. Projections et symétries

2.1 Définitions

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Tout vecteur x de E s'écrit de façon unique sous la forme $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$.

L'application p de E dans E : $x \mapsto p(x) = x_1$ est linéaire.

C'est la projection sur F, parallèlement à G.

L'application s_F de E dans E : $x \mapsto s_F(x) = x_1 - x_2$ est linéaire.

C'est la symétrie par rapport à F, parallèlement à G.

On définit de même la projection q sur G, parallèlement à F, et la symétrie s_G par rapport à G, parallèlement à F.

2.2 Propriétés

$$p + q = \mathrm{Id}_E \;\; ; \;\; p \circ q = q \circ p = 0 \;\; ; \;\; p^2 = p \;\; ; \;\; q^2 = q \;\; ; \;\; s_F^2 = \mathrm{Id}_E .$$

$$\mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Im}\, q = G \quad ; \quad \mathrm{Ker}\, q = \mathrm{Im}\, p = F .$$

p et s_F sont liées par l'égalité :

$$s_F = 2p - \mathrm{Id}_E .$$

2.3 Projecteurs

D'une facon générale, on appelle projecteur de E tout endomorphisme p de E tel que $p \circ p = p$.

On a alors :

$$E = \text{Ker}\, p \oplus \text{Im}\, p\,,$$

et p est la projection sur $\text{Im}\, p$, parallèlement à $\text{Ker}\, p$.



Attention, l'égalité $E = \text{Ker}\, f \oplus \text{Im}\, f$ entraîne seulement que $\text{Im}\, f = \text{Im}\, f^2$, et pas que f soit un projecteur.

2.4 Symétries

D'une facon générale, on appelle symétrie de E toute application linéaire s, de E dans E, telle que $s \circ s = \text{Id}_E$.

Alors $F = \{x \in E\ ;\ s(x) = x\}$ et $G = \{x \in E\ ;\ s(x) = -x\}$ sont des sous-espaces supplémentaires de E, et s est la symétrie par rapport à F, parallèlement à G.

54 Écritures matricielles

1re année

1. Définitions

1.1 Matrices

Une matrice à n lignes et p colonnes sur un corps $\mathbb{K}$ est un tableau d'éléments de $\mathbb{K}$ comportant n lignes et p colonnes.

On note a_{ij} l'élément d'une matrice A situé sur la ligne i et la colonne j. La matrice A s'écrit :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \quad \text{ou} \quad \left(a_{ij}\right).$$

On dit que A est de format (n, p), ou de type (n, p).



Attention à ne pas confondre la matrice $\left(a_{ij}\right)$ et le scalaire a_{ij}.

L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients dans $\mathbb{K}$, est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Si $p = 1$, A est une matrice colonne que l'on peut assimiler à un vecteur de $\mathbb{K}^n$.

Si $n = 1$, A est une matrice ligne que l'on peut assimiler à une forme linéaire appartenant à $(\mathbb{K}^p)^*$.

Si $n = p$, A est une matrice carrée d'ordre n. $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ se note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les éléments $a_{11}, \dots, a_{nn}$ forment la diagonale principale de A.

Deux matrices A et B sont égales si elles sont de même format, et si $a_{ij} = b_{ij}$ pour tout i et pour tout j.

1.2 Matrices particulières

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n.

- A est triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$.
- A est triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$.
- A est diagonale si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$. Elle est scalaire si $A = a\, I_n$.

2. Matrices et applications linéaires

2.1 Matrice d'une application linéaire de E dans F

Soit E et F des espaces vectoriels de dimensions p et n, munis de bases respectives $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_p)$ et $\mathcal{C} = (f_1,\ldots,f_n)$.

Soit f une application linéaire de E dans F. Elle est déterminée par la donnée des vecteurs :

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, f_i \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant p,$$

c'est-à-dire par la matrice $A = (a_{ij})$ dont les vecteurs colonnes sont les composantes de $f(e_j)$ dans la base de F qui a été choisie.

On dit que A est la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.



A dépend donc à la fois de l'application linéaire qu'elle représente et des bases choisies dans les espaces vectoriels de départ et d'arrivée.

Si E est de dimension n, dans toute base l'identité de E est représentée par la matrice carrée I_n qui comporte des 1 sur sa diagonale principale et des 0 ailleurs.

2.2 Bijection canonique entre $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n)$

Fixons une base $\mathcal{B}$ dans E et une base $\mathcal{C}$ dans F. L'application φ, de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), f \mapsto \varphi(f) = A$, est une bijection.

En particulier, si $E = \mathbb{K}^p$, $F = \mathbb{K}^n$, et si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et de $\mathbb{K}^n$, φ est la bijection canonique de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n)$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

2.3 Matrice de $f(x)$

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies munis de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, et f une application linéaire de E dans F.

Soit $x \in E$ et $y \in F$. Notons X la matrice colonne des composantes de x dans $\mathcal{B}$, Y la matrice colonne des composantes de y dans $\mathcal{C}$, M la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

L'égalité vectorielle $y = f(x)$ est équivalente à l'égalité matricielle :

$$Y = MX.$$

2.4 Matrice d'une famille finie de vecteurs

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, muni d'une base $\mathcal{B}$, et $(x_1,\ldots,x_n)$ une famille de vecteurs de E.

À chaque vecteur x_i, on associe la matrice colonne X_i de ses composantes dans $\mathcal{B}$.

À la famille $(x_1,\ldots,x_n)$, on associe la matrice de format (n,p) obtenue en juxtaposant les colonnes $X_1 \ldots X_p$.

Calcul matriciel

55

1re année

1. Opérations sur les matrices

1.1 Espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

• Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, et $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On définit :

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}) \quad \text{et} \quad A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$



Attention, on ne peut additionner deux matrices que si elles sont de même format.

Pour ces deux lois, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel.

• Pour $i \in \{1,\ldots,n\}$ et $j \in \{1,\ldots,p\}$ fixés, on note E_{ij} la matrice dont le coefficient situé sur la ligne i et la colonne j est égal à 1, et dont les autres coefficients sont égaux à 0. $\left(E_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, qui est donc de dimension $n\,p$.

• La bijection canonique φ de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n)$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme.

1.2 Produit de matrices

Si A est de format (n,p) et B de format (p,q), on définit la matrice $C = AB$, de format (n,q), par :

$$\forall i \quad \forall j \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}\,.$$



Attention à la condition d'existence de AB :

nombre de colonnes de A = nombre de lignes de B.

Ce produit est la traduction de la composée des applications linéaires $f \circ g$.
Il en a donc les propriétés : il est associatif et non commutatif.

2. Matrices carrées d'ordre n

2.1 Structures algébriques

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une algèbre isomorphe à $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$.

Les matrices diagonales, les matrices triangulaires supérieures (ou inférieures) constituent des sous-algèbres.

2.2 Formule du binôme de Newton

Si A et B commutent, alors :

$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad (A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}.$$



N'oubliez pas de vérifier la condition $AB = BA$.

2.3 Matrices inversibles

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$AB = BA = I_n.$$

Si B existe, elle est unique et on la note A^{-1}.

Les éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ forment un groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, isomorphe au groupe linéaire $\mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$. On a en particulier :

$$(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}.$$

Si A est inversible, l'endomorphisme f de E, muni d'une base $\mathcal{B}$, qui lui est associé est inversible ; et A^{-1} est la matrice de f^{-1}.

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, pour que A soit inversible, il suffit qu'elle soit inversible à droite, ou à gauche.

3. Transposition

3.1 Définition

La transposée d'une matrice A de format (n,p), est la matrice de format (p,n), notée ${}^t A$, de terme général b_{ij} :

$$\forall i \in \{1,\ldots,p\} \quad \forall j \in \{1,\ldots,n\} \qquad b_{ij} = a_{ji}.$$

Elle est donc obtenue à partir de A en échangeant les lignes et les colonnes.

3.2 Propriétés

$$^t\left({}^tA\right) = A \quad ; \quad {}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA \quad ; \quad {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB \quad ;$$

$$^t(A\,B) = {}^tB\,{}^tA \quad ; \quad {}^t\left(A^{-1}\right) = ({}^tA)^{-1}\,.$$

3.3 Matrices symétriques, antisymétriques

Une matrice carrée A est symétrique si ${}^tA = A$,

antisymétrique si ${}^tA = -A$.

Les matrices symétriques et les matrices antisymétriques constituent des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3.4 Inverse de la transposée

Si A est inversible, ${}^tA$ l'est aussi et on a :

$$\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t(A^{-1})\,.$$

56 Changements de bases

1re année et 2e année

1. Changement de bases

1.1 Matrice de passage

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de E. On appelle *matrice de passage* de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, la matrice P dont les colonnes C_j sont les composantes des vecteurs e'_j dans la base $\mathcal{B}$.

P est la matrice de l'identité de E muni de $\mathcal{B}'$, dans E muni de $\mathcal{B}$.

Si P' est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$, on a $P\,P' = P'\,P = I_n$.

Toute matrice de passage est donc inversible.

Réciproquement, toute matrice inversible peut être considérée comme une matrice de passage.

1.2 Effet d'un changement de bases

• **sur les coordonnées d'un vecteur**

Si X est la matrice colonne des composantes de x dans $\mathcal{B}$, et X' la matrice colonne des composantes de x dans $\mathcal{B}'$, on a :

$$X = PX', \quad \text{ou encore} \quad X' = P^{-1}X.$$

• **sur l'expression d'une forme linéaire**

Si une forme linéaire sur E est représentée par une matrice ligne $U = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ dans une base $\mathcal{B}$, et par U' dans une base $\mathcal{B}'$, on a $f(x) = UX = U'X'$, soit :

$$U' = U\,P.$$

1.3 Matrices équivalentes, matrices semblables

Soit f une application linéaire de E dans F, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F.

Notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$,
Q la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$,
A la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$,
A' la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$.

On a alors :

$$A' = Q^{-1} A\, P.$$

Les matrices A et A' sont dites équivalentes. Elles représentent la même application linéaire dans des bases différentes.

Si $E = F$ avec $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ et $\mathcal{B}' = \mathcal{C}'$, alors $P = Q$, soit $A' = P^{-1} A\, P$.

Les matrices A et A' sont dites semblables.

2. Rang d'une matrice

2.1 Définition

Soit A une matrice de format (n, p), E un espace vectoriel de dimension p, F un espace vectoriel de dimension n.

Quelles que soient les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ choisies dans E et F, le rang de l'application linéaire f associée à A est toujours le même. Ce rang est appelé rang de A.

C'est aussi le rang des vecteurs colonnes de A, c'est-à-dire la dimension du sous-espace vectoriel qu'ils engendrent.

2.2 Rang de la transposée

A et ${}^t A$ ont même rang. On peut donc définir le rang de A à partir de ses lignes.

2.3 Théorème

Une matrice de format (n, p) est de rang r (avec $r \leqslant \min(n, p)$) si, et seulement si, elle est de la forme $U\, J_r\, V$ où U et V sont des matrices carrées inversibles et J_r la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ définie par son terme général :

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \leqslant r, \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

En particulier, une matrice carrée d'ordre n est inversible si, et seulement si, son rang est égal à n.

2.4 Calcul du rang

Les opérations élémentaires sur les lignes, ou les colonnes, d'une matrice ne modifient pas le rang. On les utilise pour se ramener à une matrice de rang connu.

3. Trace d'une matrice

3.1 Définition

La trace d'une matrice $A = (a_{ij})$, carrée d'ordre n, est la somme de ses éléments diagonaux, soit :

$$\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \in \mathbb{K}\,.$$

3.2 Propriétés

$$\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}A + \mathrm{tr}B \quad ; \quad \mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda\,\mathrm{tr}A$$
$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA) \quad ; \quad \mathrm{tr}(PMP^{-1}) = \mathrm{tr}M.$$



Attention, en général $\mathrm{tr}(ABC) \neq \mathrm{tr}(BAC)$.

3.3 Trace d'un endomorphisme

- **Définition**

Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie, toutes les matrices qui le représentent sont semblables et ont la même trace.

Cette trace commune est la trace de l'endomorphisme f.

- **Trace d'un projecteur**

Le rang d'un projecteur est égal à sa trace.

Systèmes linéaires 57

1. Opérations élémentaires sur les matrices

1.1 Définition

Les opérations (ou manipulations) élémentaires sur les lignes d'une matrice sont :

- l'addition d'un multiple d'une ligne à une autre ligne, qui se code : $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$;
- la multiplication d'une ligne par un scalaire non nul, qui se code : $L_i \leftarrow \alpha L_i$;
- l'échange de deux lignes, qui se code : $L_i \leftrightarrow L_j$.

1.2 Interprétation

Ces transformations sont équivalentes à la prémultiplication (multiplication à gauche) par la matrice inversible obtenue en appliquant à I_n la transformation correspondante.

Les opérations analogues sur les colonnes se codent :

$$C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j \quad ; \quad C_i \leftarrow \alpha C_i \quad ; \quad C_i \leftrightarrow C_j.$$

Elles sont équivalentes à la postmultiplication (multiplication à droite) par la matrice inversible obtenue en appliquant à I_n la transformation correspondante.

1.3 Théorème

En partant d'une matrice A, l'utilisation d'un nombre fini d'opérations élémentaires conduit à une matrice équivalente à A.

2. Systèmes linéaires

2.1 Définitions

Un système de n équations linéaires à p inconnues, à coefficients dans $\mathbb{K}$, est de la forme :

$$(S)\begin{cases} a_{11}\,x_1 + \cdots + a_{1p}\,x_p & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}\,x_1 + \cdots + a_{np}\,x_p & = & b_n. \end{cases}$$

Les coefficients a_{ij} et les seconds membres b_i sont des éléments donnés de $\mathbb{K}$.

Les inconnues $x_1,\ldots,x_p$ sont à chercher dans $\mathbb{K}$.

Le système homogène associé à (S) est le système obtenu en remplaçant les b_i par 0.

Une solution est un p-uplet $(x_1,\ldots,x_p)$ qui vérifient (S). Résoudre (S), c'est chercher toutes les solutions.

Un système est impossible, ou incompatible, s'il n'admet pas de solution.

Deux systèmes sont équivalents s'ils ont les mêmes solutions.

2.2 Écriture matricielle

Si on note :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \ , \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix},$$

(S) est équivalent à l'égalité matricielle : $\quad A\,X = B$.



Attention à ce que les inconnues soient écrites dans le même ordre dans chaque équation.

2.3 Utilisation d'une application linéaire

$\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$ étant munis de leurs bases canoniques,

X est la matrice colonne des composantes d'un vecteur $x \in \mathbb{K}^p$,

B est la matrice colonne des composantes d'un vecteur $b \in \mathbb{K}^n$,

A est la matrice d'une application linéaire f de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$,

et le système (S) est équivalent à :

$$f(x) = b\,.$$

Le système (S) a des solutions si, et seulement si, b appartient à $\operatorname{Im} f$.

Dans ce cas, l'ensemble des solutions est :

$$x_0 + \operatorname{Ker} f,$$

où x_0 est une solution particulière de (S).

2.4 Écriture vectorielle

Désignons par $C_1,\dots,C_p$ les colonnes de A. Elles représentent des vecteurs de $\mathbb{K}^n$, et le système (S) se ramène à une égalité dans $\mathbb{K}^n$:

$$x_1\,C_1 + \cdots + x_p\,C_p = B\,.$$

(S) est compatible si, et seulement si, $B \in \text{Vect}(C_1,\dots,C_p)$.

3. Méthodes de résolution

3.1 Systèmes en escalier

- **Définition**

Un système (S) est en escalier, ou échelonné, si le nombre de premiers coefficients nuls successifs de chaque équation est strictement croissant.

- **Réduction**

Quand un système contient une équation du type :

$$0\,x_1 + \cdots + 0\,x_n = b\,,$$

si $b \neq 0$, le système est impossible ;

si $b = 0$, on peut supprimer cette équation, ce qui conduit au sytème réduit.

3.2 Méthode du pivot de Gauss

Soit A la matrice associée au système (S).

En permutant éventuellement deux colonnes, on peut supposer que la première colonne de A n'est pas nulle.

En permutant deux lignes si nécessaire, on peut supposer $a_{11} \neq 0$.

Pour $i > 1$, les transformations $L_i \leftarrow L_i - \dfrac{a_{i1}}{a_{11}} L_1$ éliminent l'inconnue x_1 dans les lignes autres que L_1.

Le terme a_{11} est le pivot de l'étape de l'algorithme.

En réitérant le procédé, on aboutit à une matrice triangulaire.



En calcul numérique, pour minimiser les erreurs d'arrondi, on choisit comme pivot le terme de plus grande valeur absolue (méthode du pivot partiel).

3.3 Rang d'un système

Le nombre d'équations du système réduit en escalier obtenu par la méthode de Gauss est le rang r de la matrice A, ou du système (S).

3.4 Inconnues principales, inconnues secondaires

Soit r le rang de (S) et p le nombre d'inconnues.

Si $r = p$, (S) a une solution unique.

Si $p > r$, (S) a une infinité de solutions. Les r inconnues qui figurent au début des r équations issues de la méthode de Gauss sont les inconnues principales. Elles peuvent se calculer de façon unique en fonction des $p - r$ autres inconnues, dites inconnues secondaires.



Le choix des inconnues principales et secondaires d'un système est largement arbitraire. Mais leur nombre est toujours le même.

3.5 Méthode de Gauss-Jordan

Dans cette variante du pivot de Gauss, à chaque étape on fait apparaître des zéros à la fois au-dessus et au-dessous du pivot.

4. Systèmes de Cramer

4.1 Définition

Un système est dit de Cramer s'il a une solution, et une seule.

Cette condition est équivalente à :

$$n = p \quad \text{et} \quad A \text{ inversible.}$$

4.2 Application au calcul de A^{-1}

A étant inversible, pour obtenir A^{-1}, il suffit de résoudre le système $Y = AX$, qui admet pour solution $X = A^{-1}Y$.

Déterminants 58

1re année et 2e année

1. Formes multilinéaires alternées

1.1 Définitions

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une application f, de E^n dans $\mathbb{K}$, est une forme n-linéaire si chacune de ses applications partielles

$$x_i \mapsto f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$$

est linéaire.

On dit de plus que f est alternée si $f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_p) = 0$ dès que deux coordonnées, au moins, sont égales.

f étant une forme n-linéaire alternée, σ une permutation appartenant à $\mathcal{S}_n$, de signature $\varepsilon(\sigma)$, on a :

$$f(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}) = f(x_1,\ldots,x_n)\,\varepsilon(\sigma)\,.$$

1.2 Cas où dim $E = n$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Pour toute base $(e_1,\ldots,e_n)$ de E et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, il existe une forme n-linéaire alternée unique f telle que

$$f(e_1,\ldots,e_n) = \lambda\,.$$

f étant une forme n-linéaire alternée non nulle, on a :

$$(x_1,\ldots,x_n) \text{ famille liée de } E \iff f(x_1,\ldots,x_n) = 0\,.$$

2. Déterminants

2.1 Déterminant de n vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ une base de E.

On appelle déterminant de n vecteurs $x_1,\ldots,x_n$ de E, relativement à la base $\mathcal{B}$ de E, la valeur notée $\det_{\mathcal{B}}(x_1,\ldots,x_n)$ de l'unique forme n-linéaire alternée $\det_{\mathcal{B}}$ telle que $\det_{\mathcal{B}}(e_1,\ldots,e_n) = 1$.

Si pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, on décompose $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, e_j$, alors :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \times a_{1,\sigma(1)} \times \ldots \times a_{n,\sigma(n)}\,.$$

2.2 Déterminant d'une matrice carrée

Soit $A = \left(a_{ij}\right)$ une matrice carrée d'ordre n.

On appelle déterminant de A le déterminant de ses n vecteurs colonnes, considérés comme éléments de $\mathbb{K}^n$ rapporté à sa base canonique.

2.3 Déterminant d'un endomorphisme

Après avoir montré que deux matrices semblables ont le même déterminant, on appelle déterminant d'un endomorphisme f, le déterminant commun à ses matrices représentatives.

3. Propriétés des déterminants

3.1 Transposée

$$\det A = \det {}^t A\,.$$



Les propriétés relatives aux colonnes sont donc aussi valables pour les lignes.

3.2 Propriétés d'une forme multilinéaire alternée

- On ne change pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à une de ses lignes (resp. colonnes) une combinaison linéaire des autres lignes (resp. colonnes). Cette propriété est très utilisée pour faire apparaître des 0 sur une colonne (resp. ligne).
- Multiplier une ligne (ou une colonne) d'un déterminant par un scalaire, c'est multiplier le déterminant par ce scalaire.



Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a donc $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ puisqu'on peut mettre λ en facteur dans chacune des n colonnes de A.

- Toute transposition sur les lignes (ou les colonnes) transforme $\det A$ en $-\det A$.

3.3 Produit

$$\det\,(A\,B) = \det A \times \det B\,.$$

3.4 Développement suivant une rangée

- **Définitions**

On appelle mineur de l'élément a_{ij} de Δ, déterminant d'ordre n, le déterminant d'ordre $n-1$ obtenu en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne de Δ, sans changer l'ordre des autres rangées.

Notation : D_{ij}.

On appelle cofacteur de l'élément a_{ij}, le nombre $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$.

- **Théorème**

Un déterminant est égal à la somme des produits deux à deux des éléments d'une rangée (ligne ou colonne) par leurs cofacteurs.

On utilise ce résultat après avoir fait apparaître sur une même rangée le plus possible de zéros.



Ce mode de calcul peut aussi servir de définition par récurrence d'un déterminant après avoir démontré que le résultat du développement est indépendant de la ligne, ou de la colonne, considérée.

C'est une définition plus accessible pour tous ceux que rebute un trop grand formalisme mathématique.

- **Application**

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments diagonaux.

3.5 Calcul par blocs

Soit M une matrice carrée de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

où A et D sont des matrices carrées. On a :

$$\det M = \det A \times \det D\,.$$

3.6 Matrice carrée inversible

$$A \text{ inversible} \iff \det A \neq 0\,.$$

On a alors $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

4. Quelques applications mathématiques des déterminants

PSI

4.1 Calcul possible pour A^{-1}

Cette méthode est quasi-impraticable si $n > 3$.

- On calcule la matrice des cofacteurs des éléments de A, appelée comatrice de A.
- On transpose la comatrice de A.
- On divise par det A.

4.2 Rang d'une matrice

Le rang d'une matrice quelconque A, est égal au plus grand entier s tel que l'on puisse extraire de A une matrice carrée d'ordre s inversible, c'est-à-dire de déterminant non nul.

4.3 Formules de Cramer

La solution d'un système de Cramer d'écriture matricielle $AX = B$ est donnée par :

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)} \qquad 1 \leqslant j \leqslant n$$

où A_j est la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la j-ième colonne par la colonne des seconds membres B.



Ces formules sont utiles quand les coefficients du système dépendent d'un, ou plusieurs, paramètre. Sinon la méthode du pivot de Gauss est préférable.

Réduction des endomorphismes

59

2e année

1. Éléments propres d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1.1 Définitions

- Un vecteur non nul $x \in E$ est un vecteur propre de f s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda x$. Le scalaire λ est la valeur propre associée à x.
- Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f s'il existe un vecteur non nul $x \in E$ tel que $f(x) = \lambda x$. Le vecteur x est un vecteur propre associé à λ.
- L'ensemble $E_\lambda = \{x \in E \ ; \ f(x) = \lambda x\} = \mathrm{Ker}\big(f - \lambda \, \mathrm{Id}_E\big)$ est le sous-espace propre associé à λ.
- Le spectre de f est l'ensemble $S_p(f)$ des valeurs propres de f.

1.2 Propriétés

- λ est une valeur propre de f si, et seulement si, $\mathrm{Ker}(f - \lambda \, \mathrm{Id}_E) \neq \{0\}$.

En particulier, 0 est valeur propre de f si, et seulement si, $\mathrm{Ker} f \neq \{0\}$, soit f non injectif.

- Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres toutes distinctes, est libre.
- La somme de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe.



Attention, en général $E \neq \bigoplus_k E_{\lambda_k}$. Par exemple, si $f^2 = 0$ avec $f \neq 0$, 0 est la seule valeur propre possible et pourtant $E \neq \mathrm{Ker} f$.

1.3 Polynôme caractéristique

Soit E de dimension finie et A une matrice carrée représentant un endomorphisme f dans une base fixée.

• **Définitions**

Le polynôme $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ est le polynôme caractéristique de A.

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, ce qui permet de définir le polynôme caractéristique d'un endomorphisme.

Les zéros de P_A sont les valeurs propres de A. Si λ est racine d'ordre m_λ de P_A, on dit que λ est valeur propre d'ordre m_λ.

On a toujours $1 \leqslant \dim(E_\lambda) \leqslant m_\lambda$ où E_λ est l'espace propre associé.

• **Cas où P_A est scindé**

On a alors :

$$\text{tr}A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \quad \text{et} \quad \det A = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k .$$

2. Diagonalisation

Soit E de dimension finie.

2.1 Définitions

Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale, c'est-à-dire s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.

Une matrice carrée A est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale D, c'est-à-dire si elle s'écrit

$$A = PDP^{-1}$$

où P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à une base de vecteurs propres de A.

2.2 Condition suffisante

Si $\dim E = n$ et si f a n valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable.

2.3 Condition nécessaire et suffisante

f diagonalisable $\iff$ E est somme directe des sous-espaces propres ;

$\iff$ E admet une base de vecteurs propres ;

$\iff$ le polynôme caractéristique de f est scindé et, pour toute valeur propre λ_k d'ordre m_k, on a :

$$\dim(E_{\lambda_k}) = m_k .$$

2.4 Calcul de A^m

Si A est diagonalisable, il existe une matrice de passage P telle que $A = PDP^{-1}$. On a alors $A^m = PD^mP^{-1}$.

Et si $D = \text{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ alors $D^m = \text{diag}(\lambda_1^m,\ldots,\lambda_n^m)$.

3. Trigonalisation

3.1 Définition

Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de *f* est triangulaire supérieure.

Une matrice carrée A est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

3.2 Théorème

Si le polynôme caractéristique de *f* est scindé, *f* est trigonalisable.



En particulier, tout endomorphisme est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.

Les éléments diagonaux de la matrice triangulaire représentant *f* sont les valeurs propres de *f*.

60 Polynômes annulateurs

PC-PSI

2e année

1. Polynôme d'un endomorphisme

1.1 Définition

Étant donnés un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et un polynôme $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_p X^p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, on note $P(f)$ l'endomorphisme de E défini par :

$$P(f) = a_0 \operatorname{Id}_E + a_1 f + \cdots + a_p f^p .$$

1.2 Propriétés algébriques

Si $f \in \mathcal{L}(E)$, $P \in \mathbb{K}[X]$, $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$(P+Q)(f) = P(f) + Q(f) \ ; \ (\lambda P)(f) = \lambda P(f) \ ;$$

$$(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f) .$$

Cette dernière relation entraîne que tous les polynômes d'un même endomorphisme commutent entre eux.

On peut dire aussi que, pour f donné, l'application $P \mapsto P(f)$ est un morphisme de l'algèbre $\mathbb{K}[X]$ dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$.

Ce morphisme n'est pas surjectif puisque $\mathcal{L}(E)$ n'est pas commutatif.

1.3 Stabilité

Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\operatorname{Im} P(f)$ et $\operatorname{Ker} P(f)$ sont stables par f.

1.4 Propriété des valeurs propres

Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, si λ est une valeur propre de f, alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(f)$.

2. Polynôme annulateur

2.1 Définition

On dit que P est un polynôme annulateur de f si $P(f) = 0$.

2.2 Polynôme minimal PSI

L'ensemble des polynômes annulateurs de f, c'est-à-dire le noyau du morphisme $P \mapsto P(f)$, est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

L'unique polynôme normalisé qui engendre cet idéal est le polynôme minimal de f.

3. Condition nécessaire et suffisante pour f diagonalisable

f est diagonalisable si, et seulement si, il existe un polynôme scindé, annulateur de f, dont toutes les racines sont simples.

4. Théorème de Cayley-Hamilton PSI

4.1 Théorème

Si E est de dimension finie, le polynôme caractéristique de f est un polynôme annulateur de f.

Le polynôme minimal de f divise donc le polynôme caractéristique de f.

4.2 Application au calcul de A^m

Si P est un polynôme annulateur de A, la division euclidienne

$$X^m = P(X)\, Q_m(X) + R_m(X)$$

entraîne $A^m = R_m(A)$.



Cette méthode reste valable même si A n'est pas diagonalisable.

4.3 Application au calcul de A^{-1}

Si A est inversible, on a :

$$a_0\, I + a_1 A + \cdots + a_n A^n = 0 \qquad \text{avec} \qquad a_0 = \det A \neq 0,$$

d'où : $-\dfrac{1}{a_0}\left[a_1\, I + \cdots + a_n\, A^{n-1}\right] A = I$

soit :

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}\left[a_1\, I + \cdots + a_n\, A^{n-1}\right].$$

61 Espaces préhilbertiens

2e année

1. Forme bilinéaire et forme quadratique

1.1 Définitions

- **Forme bilinéaire symétrique**

Une forme bilinéaire f sur E est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$, linéaire par rapport à chaque variable.

Ele est symétrique si :

$$\forall (x,y) \in E \times E \qquad f(x,y) = f(y,x)\,.$$

Une application q de E dans $\mathbb{K}$ est une forme quadratique sur E s'il existe une forme bilinéaire symétrique f telle que :

$$\forall x \in E \qquad q(x) = f(x,x)\,.$$

q est la forme quadratique associée à f.

- **Forme polaire d'une forme quadratique**

Une forme quadratique q sur E est associée à une seule forme bilinéaire symétrique f donnée par :

$$\forall (x,y) \in E \times E \qquad f(x,y) = \frac{1}{2}\big[q(x+y) - q(x) - q(y)\big]\,.$$

f est la forme polaire de q.

- **Forme positive**

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, une forme quadratique q, et sa forme polaire f, sont dites positives si :

$$\forall x \in E \qquad q(x) \geqslant 0\,.$$

- **Forme définie positive**

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, une forme bilinéaire symétrique f, et sa forme quadratique associée q, est dite définie positive si :

$$\forall x \in E \setminus \{0\} \qquad q(x) > 0\,.$$

1.2 Cas où E est de dimension finie

Soit E de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

- **Matrice d'une forme bilinéaire**

Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_j\, e_j$, alors $f(x,y) = \sum_{i,j} x_i\, y_j\, f(e_i, e_j)$.

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de terme général $a_{ij} = f(e_i, e_j)$.

En posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on a :

$$f(x,y) = {}^tXAY = {}^tYAX$$

f est symétrique si, et seulement si, la matrice A est symétrique.

- **Expression d'une forme quadratique**

$q(x)$ est un polynôme homogène de degré 2 en $x_1, \ldots, x_n$ (combinaison linéaire d'expressions du type x_i^2 ou $x_i\, x_j$ avec $i \neq j$).

Réciproquement, tout polynôme homogène de degré 2 par rapport aux coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ est une forme quadratique sur E.

2. Espaces préhilbertiens réels

2.1 Produit scalaire

- **Définitions**

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire φ, symétrique, définie positive.

On dit que (E, φ) est un espace préhilbertien réel.

$\varphi(x,y)$ se note $< x \mid y >$ ou $(x \mid y)$ ou $x.y$.

- **Exemples**

Dans $\mathbb{R}^n$ $\quad < X \mid Y >= {}^tXY = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Dans $E = \mathcal{C}\big([a,b], \mathbb{R}\big)$ $\quad < f \mid g >= \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\quad < A \mid B >= \mathrm{tr}\left({}^tAB\right)$

2.2 Norme euclidienne

E étant un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire, en posant

$$\forall x \in E \qquad \|x\| = \sqrt{< x \mid x >}\,,$$

on définit une norme sur E.
On obtient aussi une distance en posant $d(x,y) = \|x - y\|$.

2.3 Relations entre produit scalaire et norme

- **Égalité de polarisation**

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \qquad \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 < x \mid y >\,,$$

ce qui permet d'obtenir le produit scalaire $< x \mid y >$ en fonction des normes.

- **Identité du parallélogramme**

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)\,.$$



Cette égalité est la généralisation de la propriété géométrique : dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des côtés.

2.4 Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \qquad \big| < x \mid y > \big| \leqslant \|x\|\,\|y\|\,.$$

Dans cette inégalité, l'égalité a lieu si, et seulement si, x et y sont liés.



Pour retenir ce théorème, pensez au cas particulier de deux vecteurs du plan et à

$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = \|\overrightarrow{x}\|\|\overrightarrow{y}\|\cos(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})\,.$$

3. Espaces préhilbertiens complexes

3.1 Produit scalaire hermitien PC-PSI

- **Définitions**

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Un produit scalaire hermitien sur E est une application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$ qui vérifie la symétrie hermitienne, soit :

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad \varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$$

est linéaire à droite, soit :

$\forall(x,y_1,y_2) \in E^3 \quad \forall(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{C}^2$

$$\varphi(x,\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 \varphi(x,y_1) + \lambda_2 \varphi(x,y_2)$$

est donc semi-linéaire à gauche, soit :

$\forall(x_1,x_2,y) \in E^3 \quad \forall(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{C}^2$

$$\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2,y) = \overline{\lambda_1}\,\varphi(x_1,y) + \overline{\lambda_2}\,\varphi(x_2,y)$$

est définie positive, soit :

$$\forall x \in E \qquad \varphi(x,x) \geqslant 0 \qquad ; \qquad \varphi(x,x) = 0 \iff x = 0\,.$$



Remarquez que, grâce à la symétrie hermitienne, on a bien $\varphi(x,x) \in \mathbb{R}$.

On dit que (E,φ) est un espace préhilbertien complexe.

$\varphi(x,y)$ se note $< x \mid y >$ ou $(x \mid y)$.

• **Exemples**

Dans $\mathbb{C}^n \qquad < X \mid Y >= {}^t\overline{X}\,Y = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}\,y_i\,.$

Dans $E = \mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{C}\big) \qquad < f \mid g >= \int_a^b \overline{f(t)}\,g(t)\mathrm{d}t\,.$

3.2 Norme hermitienne

E étant un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire hermitien, on définit une norme sur E en posant :

$$\forall x \in E \qquad \|x\| = \sqrt{< x \mid x >}\,,$$

On obtient aussi une distance en posant $d(x,y) = \|x - y\|$.

3.3 Relations entre produit scalaire et norme

$\forall x \in E \quad \forall y \in E$

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\, < x \mid y >\,,$$

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)\,.$$

$$4 < x \mid y >= \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 - \mathrm{i}\|x + \mathrm{i}y\|^2 + \mathrm{i}\|x - \mathrm{i}y\|^2$$

3.4 Inégalité de Cauchy-Schwarz

- **Théorème (inégalité de Cauchy-Schwarz)**

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \qquad \left| < x \mid y > \right| \leqslant \|x\| \|y\| \,.$$

Dans cette inégalité, l'égalité a lieu si, et seulement si, x et y sont liés.

- **Corollaire (inégalité triangulaire)**

$$\forall x \in \quad \forall y \in E \qquad \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

Dans cette inégalité, l'égalité a lieu si, et seulement si, x et y sont liés avec $< x|y > \in \mathbb{R}_+$.

Orthogonalité 62

2e année

Le corps de base est $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Vecteurs orthogonaux

1.1 Définitions

Deux vecteurs x et y sont orthogonaux si $< x|y >= 0$; on note $x \perp y$.

Une famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ est orthogonale si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

Une famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ est orthonormale si elle est orthogonale et si les vecteurs sont tous unitaires.

1.2 Propriété

Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

1.3 Théorème de Pythagore

Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille orthogonale finie, on a :

$$\| \sum_{i\in I} x_i \|^2 = \sum_{i\in I} \|x_i\|^2 .$$



Attention, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a l'équivalence :

$$x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 ,$$

mais si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on a seulement :

$$x \perp y \implies \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

La réciproque est fausse car l'égalité entraîne seulement :

$$\text{Re} < x|y >= 0 .$$

2. Sous-espaces vectoriels orthogonaux

2.1 Définitions

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien E.

On dit que F et G sont orthogonaux, et on note $F \perp G$, quand :

$$\forall x \in F \quad \forall y \in G \qquad < x|y >= 0\,.$$



Dans $\mathbb{R}^3$, on définit ainsi l'orthogonalité d'une droite et d'un plan, mais deux plans ne peuvent pas être orthogonaux.

L'orthogonal de F est le sous-espace vectoriel défini par :

$$F^\perp = \{x \in E\ ;\ \forall y \in F \quad < x|y >= 0\}\,.$$

2.2 Propriétés

$$E^\perp = \{0\}\ ;\ \{0\}^\perp = E\ ;\ F \perp G \iff F \subset G^\perp \iff G \subset F^\perp$$



Attention, $F \perp G$ n'entraîne pas $G = F^\perp$.

$$F \subset G \Longrightarrow G^\perp \subset F^\perp\ ;\ F \subset \left(F^\perp\right)^\perp\ ;\ F \cap F^\perp = \{0\}$$



Attention, en général $E \neq F \oplus F^\perp$ et $F \neq \left(F^\perp\right)^\perp$.

3. Supplémentaire orthogonal

3.1 Définition

Dans un espace préhilbertien E, deux sous-espaces vectoriels F et G sont dits supplémentaires orthogonaux quand :

$$E = F \oplus G \quad \text{et} \quad F \perp G\,.$$

3.2 Propriété

Si F et G sont supplémentaires orthogonaux, on a $F = G^\perp$, $G = F^\perp$, d'où $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.

3.3 Projecteur orthogonal

$p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur orthogonal quand $p^2 = p$ et $\operatorname{Im} p \perp \operatorname{Ker} p$.

Im p et Ker p sont alors supplémentaires orthogonaux.

4. Orthogonalité en dimension finie

4.1 Méthode d'orthogonalisation de Schmidt

Soit $(x_1,\dots,x_n)$ une famille libre de E ; il existe une famille libre orthogonale $(y_1,\dots,y_n)$ telle que $\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n) = \mathrm{Vect}(y_1,\dots,y_n)$.
Dans la méthode de Schmidt, elle se construit par récurrence en posant :

$$y_1 = x_1 \qquad \text{puis} \qquad y_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \, y_i \qquad \text{avec} \qquad \lambda_i = \frac{< y_i | x_k >}{< y_i | y_i >}.$$



Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, faites attention à l'ordre des produits scalaires dans λ_i.

4.2 Corollaire

Tout espace préhilbertien E de dimension finie n admet une base orthonormale.

4.3 Intérêt d'une base orthonormale

Soit E muni d'une base orthonormale $(e_1,\dots,e_n)$.

$$\text{Si } x = \sum_{i=1}^{n} x_i \, e_i, \qquad \text{on a} \qquad x_i = < e_i | x >.$$



Attention à l'ordre du produit scalaire si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

X et Y étant les matrices colonnes des coordonnées de x et de y, on a :

$$< x | y > = {}^t\overline{X} Y \ ; \ \|x\| = \sqrt{{}^t\overline{X} X} \ ; \ d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}.$$

4.4 Théorème

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien E de dimension finie n ; alors $E = F \oplus F^{\perp}$.

5. Cas d'un sous-espace F de dimension finie dans un espace E de dimension infinie

5.1 Théorème

$$E = F \oplus F^{\perp}$$

On peut donc définir le projecteur orthogonal p_F sur F.

Si $(e_1,\dots,e_p)$ est une base orthonormale de F, on a :

$$\forall x \in E \qquad p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} < e_i | x > e_i\,.$$

5.2 Définition

On appelle distance d'un élément x de E au sous-espace de dimension finie F le nombre :

$$d(x,F) = \inf_{z \in F} \|x - z\|\,.$$

5.3 Théorème

$d(x,F)$ est un minimum atteint en un point, et un seul, $z = p_F(x)$, et l'on a :

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + d(x,F)^2\,.$$



Attention, il est important que F soit de dimension finie.

5.4 Inégalité de Bessel

Si $(e_1,\dots,e_p)$ est une base orthonormale de F, on a :

$$\forall x \in E \qquad \sum_{j=1}^{p} \left| < e_j | x > \right|^2 \leqslant \|x\|^2\,.$$

Espaces vectoriels euclidiens

63

2e année

1. Définition et premières propriétés

1.1 Définition

Un espace vectoriel euclidien E est un espace préhilbertien réel de dimension finie n.

1.2 Propriétés

Il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E et, dans une telle base, pour tout $x \in E$ et $y \in E$, on a :

$$x = \sum_{i=1}^{n} < e_i | x > e_i \quad ; \quad < x | y > = {}^t XY \quad ; \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,.$$

Si F est un sous-espace vectoriel de E, on a $E = F \oplus F^{\perp}$.

On peut définir le projecteur orthogonal p_F sur F et $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$.

2. Isomorphisme avec le dual

Toute forme linéaire f sur un espace euclidien E s'écrit de façon unique sous la forme $f(x) = < a | x >$ où a est un vecteur de E.

On a donc $H = \left(\mathbb{R}a\right)^{\perp}$. H est un hyperplan si $f \neq 0$, soit $a \neq 0$.

3. Orientation

3.1 Orientation de E

Une base orthonormale $\mathcal{B}_0$ étant choisie, on dit que $\mathcal{B}$ est une base directe si $\det_{\mathcal{B}_0} \mathcal{B} > 0$ et indirecte si $\det_{\mathcal{B}_0} \mathcal{B} < 0$.

3.2 Orientation d'un hyperplan

Un hyperplan est orienté par le choix d'un vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

Une base $\mathcal{B}$ de H est dite directe si, et seulement si, $\left(\mathcal{B}, \overrightarrow{n}\right)$ est une base directe de E.

64 Endomorphismes orthogonaux

2[e] année

1. Définitions et caractérisations

1.1 Définition

Dans un espace vectoriel euclidien E, un endomorphisme f est dit orthogonal s'il conserve le produit scalaire, soit

$$\forall x \in E \qquad \forall y \in E \qquad < f(x) | f(y) >=< x | y > \qquad \textbf{(1)}.$$

On dit aussi que f est une isométrie vectorielle.



En fait, la condition **(1)** entraîne $f \in \mathcal{L}(E)$.

1.2 Conditions équivalentes

$f \in \mathcal{L}(E)$ est orthogonal si, et seulement si, il vérifie l'une des conditions suivantes :

(2) f conserve la norme, soit

$$\forall x \in E \qquad \|f(x)\| = \|x\| \ ;$$

(3) il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ telle que $f(\mathcal{B})$ soit une base orthonormale ;

(4) pour toute base orthonormale $\mathcal{B}$, $f(\mathcal{B})$ est une base orthonormale.

1.3 Corollaire

Un endomorphisme orthogonal f appartient à $\mathrm{GL}(E)$. Il est appelé automorphisme orthogonal de E.

Ses seules valeurs propres réelles possibles sont 1 et -1.

1.4 Exemples

Les symétries orthogonales et les réflexions sont des automorphismes orthogonaux.

Mais une projection orthogonale distincte de l'identité n'en est pas un ; si $x \in \mathrm{Ker}\, p$ avec $x \neq 0$, on a $\|p(x)\| < \|x\|$.

1.5 Groupe orthogonal

L'ensemble des automorphismes orthogonaux de E est noté $\mathrm{O}(E)$ et appelé groupe orthogonal de E. C'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$.

2. Matrices orthogonales

2.1 Définition

Une matrice carrée A est dite orthogonale si c'est la matrice de passage d'une base orthonormale $\mathcal{B}$ à une base orthonormale $\mathcal{B}'$.

L'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n est le groupe orthogonal d'ordre n ; il est noté $\mathrm{O}(n)$.

2.2 Conditions équivalentes

Une matrice carrée est orthogonale si, et seulement si, ses vecteurs colonnes vérifient :

$$\forall i \quad \forall j \qquad < C_i | C_j >= \delta_{ij}.$$

Une matrice carrée d'ordre n est orthogonale si, et seulement si :

$${}^t\!A\, A = I_n \iff {}^t\!A = A^{-1}.$$

2.3 Lien avec les endomorphismes

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale d'un espace euclidien E et A la matrice de $f \in \mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{B}$. On a :

$$A \in \mathrm{O}(n) \iff f \in \mathrm{O}(E).$$

Le groupe $\mathrm{O}(n)$ pour le produit de matrices est isomorphe au groupe $\mathrm{O}(E)$ pour la composition des applications.

2.4 Déterminant d'une matrice orthogonale

Si A est une matrice orthogonale, on a $\det A = \pm 1$.



Attention, la condition est nécessaire mais non suffisante.

2.5 Groupe spécial orthogonal

On appelle groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(E)$, ou groupe des rotations de E, le sous-groupe de $\mathrm{O}(E)$ formé des automorphismes orthogonaux de déterminant égal à 1.

De même pour les matrices : $\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{O}(n) \ ; \det A = 1\}$.

3. Cas de la dimension 2

3.1 Rotations

La rotation d'angle θ appartient à $\mathrm{SO}(E)$.

Dans toute base $\mathcal{B}$ orthonormale directe, sa matrice s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

On a $\det A = 1$ et $\operatorname{tr} A = 2\cos\theta$.

3.2 Réflexions

La matrice de la réflexion d'axe Δ dans une base $\mathcal{B}$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

mais elle dépend de $\mathcal{B}$. Dans une base adaptée, elle s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Δ est l'ensemble des vecteurs invariants. On a $\det B = -1$ et $\operatorname{tr} B = 0$.

4. Cas de la dimension 3

Le classement se fait suivant la dimension de $V = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$, espace vectoriel des vecteurs invariants par f.

4.1 Cas $\dim V = 3$

On a alors $f = \mathrm{Id}_E$.

4.2 Cas $\dim V = 2$

f est alors la réflexion par rapport à V. Dans une base adaptée, sa matrice est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4.3 Cas $\dim V = 1$

f est alors une rotation d'axe V. Si on oriente l'axe et si on note son angle θ, sa matrice dans une base adaptée *directe*, est :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Étude pratique d'une rotation

Si r est la rotation d'axe dirigé par un vecteur unitaire $\overrightarrow{n}$ et d'angle θ, on a :

$$r(\overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{n}.\overrightarrow{x})\overrightarrow{n} + \cos\theta[\overrightarrow{x} - (\overrightarrow{n}.\overrightarrow{x})\overrightarrow{n}] + \sin\theta\,\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{x}\,.$$

Réciproquement, soit f un automorphisme orthogonal dont l'ensemble des vecteurs invariants est une droite de vecteur directeur unitaire $\overrightarrow{n}$.
C'est une rotation dont l'angle θ vérifie $\operatorname{tr}A = 1 + 2\cos\theta$.

65 Endomorphismes symétriques

PSI

2e année

1. Adjoint d'un endomorphisme

1.1 Définition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$; l'adjoint de f est l'unique élément $f^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \qquad < f(x)|y > = < x|f^*(y) >$$

1.2 Propriétés

- L'application $\varphi : f \mapsto f^*$ est un endomorphisme involutif de $\mathcal{L}(E)$, c'est-à-dire que l'on a toujours :

$$(f+g)^* = f^* + g^* \quad ; \quad (\lambda f)^* = \lambda f^* \quad ; \quad (f^*)^* = f$$

- Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E, on a :

$$A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} f \implies {}^t A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} f^* .$$

Il en résulte $\quad (f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

Si f est inversible, alors f^* est inversible et $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.

- Endomorphismes orthogonaux

$$f \in \mathrm{O}(E) \iff f^* = f^{-1}$$

- Noyaux et images

$$\mathrm{Ker}\, f^* = (\mathrm{Im}\, f)^\perp \quad ; \quad \mathrm{Im}\, f^* = (\mathrm{Ker}\, f)^\perp \quad ; \quad \mathrm{rg}(f^*) = \mathrm{rg}\, f$$

$$f(F) \subset F \iff f^*(F^\perp) \subset F^\perp$$

2. Endomorphismes symétriques

2.1 Définition

$f \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique, ou autoadjoint, si $f = f^*$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \qquad < f(x)|y > = < x|f(y) >$$



Attention à ne pas confondre endomorphisme symétrique et symétrie.

On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E.

2.2 Propriétés

- Si A est la matrice de f dans une base orthonormale $\mathcal{B}$, on a

$$f \text{ symétrique} \iff {}^tA = A\,.$$

- $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, mais pas une sous-algèbre car, si A et B sont symétriques, AB est symétrique si, et seulement si, $AB = BA$.
- p projecteur orthogonal $\iff p^2 = p$ et $p^* = p$.
- s symétrie orthogonale $\iff s = s^{-1} = s^*$.

2.3 Diagonalisation des endomorphismes symétriques

Soit f un endomorphisme symétrique de E.

- Le polynôme caractéristique de f est scindé sur $\mathbb{R}$.
- f est diagonalisable dans une base orthonormale.
- E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de f.
- Corollaire

Si A est une matrice carrée symétrique, il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que :

$$A = PDP^{-1} = PD\,{}^tP\,.$$



Le calcul de P^{-1} est immédiat puisque $P^{-1} = {}^tP$.

2.4 Forme quadratique et valeurs propres

Soit A une matrice symétrique réelle et q la forme quadratique associée.

q est positive $\iff$ les valeurs propres de A sont $\geqslant 0$;

q est définie positive $\iff$ les valeurs propres de A sont > 0.

Partie 5

Géométrie

66 Espaces affines

1re année

1. Définitions

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. On construit un espace affine (ensemble de points) V de direction E en se donnant une application :

$$\begin{array}{ccc} V \times E & \longrightarrow & V \\ (M,x) & \mapsto & M+x \end{array}$$

telle que :

$\forall A \in V \qquad \forall (x,y) \in E^2 \qquad A+(x+y) = (A+x)+y$

$\forall A \in V$, l'application $x \mapsto A+x$ est une bijection de E sur V.

Si $A+x = B$, on note $x = \overrightarrow{AB}$.

Une origine O étant fixée dans V, l'application de A dans E :

$$M \mapsto \overrightarrow{OM}$$

est une bijection.

Le choix d'une origine permet donc d'identifier espace affine et espace vectoriel. Les éléments de E seront alors indifféremment appelés vecteurs ou points.

2. Sous-espaces affines

2.1 Définitions

A étant un point de E et F un sous-espace vectoriel de E, l'ensemble

$$W = A + F = \{A + x \,;\, x \in F\}$$

est un sous-espace affine de E.

W est de direction F et de dimension $\dim F$.

2.2 Parallélisme

Soit deux sous-espaces affines $W = A+F$ et $W' = A'+F'$.

On dit que W est parallèle à W' si F est un sous-espace vectoriel de F'.

On dit W et W' sont parallèles entre eux si $F = F'$.

2.3 Intersection

Deux sous-espaces affines $W = A + F$ et $W' = A' + F'$ ont une intersection non vide si, et seulement si, $\overrightarrow{AA'} \in F + F'$.

Leur intersection est alors un sous-espace affine de direction $F \cap F'$.



Deux sous-espaces affines peuvent avoir une intersection vide sans être parallèles. Pensez à deux droites dans l'espace.

67 Applications affines

1re année

1. Applications affines

1.1 Définitions

Soit V et V' deux espaces affines dont les directions respectives sont les espaces vectoriels réels E et E'.

Une application f de V dans V' est dite affine s'il existe un point A de V et une application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, E')$ tels que :

$$\forall x \in E \qquad f(A+x) = f(A) + \varphi(x)\,.$$

φ est l'application linéaire associée à f.

On peut aussi écrire :

$$\forall M \in V \qquad \varphi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}\,.$$

Si $f(A) = A$, on peut alors identifier φ et f.

Si φ est un isomorphisme, on dit que f est un isomorphisme affine.

Si $E = E'$ et si φ est un automorphisme, on dit que f est une transformation affine.

1.2 Propriétés

- Une application affine conserve l'alignement et le parallélisme.
- La composée de deux applications affines f et g est une application affine dont l'application linéaire associée est la composée des applications linéaires associées à f et g.
- Les transformations affines de V forment un groupe pour la loi $\circ$. C'est le groupe affine $\mathrm{GA}(V)$. L'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GA}(V) & \longrightarrow & \mathrm{GL}(E) \\ f & \mapsto & \varphi \end{array}$$

est un morphisme surjectif de groupes.

1.3 Applications affines particulières

- **Translations**

Soit $u \in E$. La translation t_u est l'application affine qui, à $M \in V$, associe $M' \in V$ tel que $\overrightarrow{MM'} = u$.

Son application linéaire associée est l'identité de E.

L'ensemble des translations de V est un sous-groupe de $\mathrm{GA}(V)$.

- **Homothéties**

Soit $A \in V$ et $k \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. L'homothétie $h(A,k)$ de centre A et de rapport k est l'application affine qui, à $M \in V$, associe $M' \in V$ tel que $\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}$.

Son application linéaire associée est $k\mathrm{Id}_E$.

La composée de deux homothéties $h(A,k)$ et $h(A',k')$ est :

– si $kk' \neq 1$, une homothétie de rapport kk', dont le centre est aligné avec A et A' ;

– si $kk' = 1$, une translation.

L'ensemble des homothéties et translations de V est un sous-groupe de $\mathrm{GA}(V)$.

- **Projections**

Une projection est une application affine p telle que $p \circ p = p$.

Son application linéaire associée est un projecteur de E.

L'ensemble des points invariants de p est égal à $p(A)$. C'est un sous-espace affine de direction $\mathrm{Im}\,\varphi$. Le noyau $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est un supplémentaire de $\mathrm{Im}\,\varphi$.

On dit que p est la projection sur $p(A)$, parallèlement à $\mathrm{Ker}\,\varphi$.

- **Symétries**

Une symétrie est une application affine s telle que $s \circ s = \mathrm{Id}_A$.

Son application linéaire associée est une symétrie de E.

$p = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Id}_A + s\right)$ est une projection.

L'ensemble des points invariants de s est égal à $p(A)$.

On dit que s est la symétrie par rapport à $p(A)$, parallèlement à $\mathrm{Ker}\,\varphi$.

- **Affinités**

Soit $k \in \mathbb{R}$ et p une projection de A. On appelle affinité de rapport k, de base $p(A)$ et de direction $\mathrm{Ker}\,\varphi$, l'application affine :

$$M \mapsto M' = kM + (1-k)p(M).$$

2. Repères cartésiens

2.1 Définitions

Un repère cartésien $\mathcal{R}$ de V est un couple $(O,\mathcal{B})$ où O est un point de V appelé origine et $\mathcal{B}$ une base de E.

Les coordonnées de $M \in V$ dans $\mathcal{R}$ sont les composantes de $\overrightarrow{OM}$ dans $\mathcal{B}$.

Si $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{R}$ est le repère canonique de $\mathbb{R}^n$.

On écrit souvent les coordonnées de M sous forme d'une matrice-colonne X.

Un repère cartésien d'un sous-espace affine W est formé par un point de W et une base de la direction de W.

2.2 Changement de repère

Soit $(O',\mathcal{B}')$ un nouveau repère de V ; notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et Q la matrice-colonne des coordonnées de O' dans $\mathcal{R}$.

Soit M un point dont les coordonnées sont X dans le repère $\mathcal{R}$ et X' dans le repère $\mathcal{R}'$. On a :

$$X = PX' + Q$$

C'est la traduction matricielle de $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O'M} + \overrightarrow{OO'}$.

2.3 Représentation d'une application affine

Soit $(O,\mathcal{B})$ un repère affine de E, $(O',\mathcal{B}')$ un repère affine de E' et f une application affine de E dans E'.

Notons X les coordonnées de M dans E et X' les coordonnées de $f(M)$ dans E'. Elles sont reliées par une égalité matricielle du type :

$$X' = AX + B.$$

Barycentres 68

1re année

1. Définition

Soit $A_1,\dots,A_n$ des points de E et $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ des réels avec $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$.

Le barycentre du système des points pondérés $\{(A_i,\alpha_i);\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$ est l'unique point G tel que :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}\,.$$

On a alors, pour tout point P : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{PA_i} = \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\Big)\overrightarrow{PG}$.



En choisissant $P = O$, on peut ainsi calculer les coordonnées de G.

Si les coefficients α_i sont tous égaux, G s'appelle l'isobarycentre des points A_i.

2. Propriétés

- Le barycentre d'un système de points pondérés n'est pas modifié si l'on multiplie tous les coefficients par un même nombre non nul.
- Le barycentre d'un ensemble de points pondérés est inchangé si l'on remplace un sous-ensemble par son barycentre partiel (s'il existe) affecté de la somme des coefficients des points remplacés.
- Si les n points appartiennent à un même sous-espace affine, leur barycentre est aussi dans ce sous-espace.
- L'image d'un barycentre par une application affine est le barycentre des images, affectées des mêmes coefficients.

3. Parties convexes

3.1 Segment

M et N étant des points distincts de E, le segment d'extrémités M et N est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de M et N, soit :

$$[MN] = \{\lambda M + (1 - \lambda)N \,;\, \lambda \in [0,1]\}.$$

3.2 Partie convexe

Une partie A de E est convexe si, pour tout $(M,N) \in A^2$, le segment $[MN]$ est inclus dans A.

L'intersection de deux parties convexes, l'image d'une partie convexe par une application affine, sont des parties convexes.

Calcul vectoriel 69

1re année

1. Produit scalaire

1.1 Définition

La définition générale d'un produit scalaire figure dans la fiche 63.

On peut définir le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par,

- si l'un des vecteurs est nul :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0\ ;$$

- si les vecteurs non nuls définissent un angle θ :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \cos\theta\,.$$

1.2 Expression analytique

Si $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est une base orthonormale et si $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{v} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k}$, alors :

$$\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'.$$

2. Produit vectoriel

2.1 Orientation de l'espace

Un repère $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$ étant donné, considérons un observateur ayant les pieds en O, la tête en C et regardant dans la direction de A. Le repère est dit

- direct si l'observateur a le point B à sa gauche,
- indirect si l'observateur a le point B à sa droite.



La définition plus théorique de l'orientation figure dans la fiche 65.

2.2 Définition

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{w}$ tel que :

• si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$,

• si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, $\overrightarrow{w}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$, de norme $\|\overrightarrow{w}\| = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et le repère $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$ est direct.

On le note $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.

2.3 Propriétés

Le produit vectoriel est

• antisymétrique, car on a toujours :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}$$

• bilinéaire, car on a toujours :

$$(\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}) \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u_2} \wedge \overrightarrow{v} \quad ; \quad (\lambda \overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{v} = \lambda(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$$

2.4 Expression analytique

Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est une base orthonormale directe de l'espace. Si l'on a $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{v} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k}$, alors :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (yz' - zy')\overrightarrow{i} + (zx' - xz')\overrightarrow{j} + (xy' - yx')\overrightarrow{k}$$

2.5 Double produit vectoriel

$$\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})\overrightarrow{w}$$

2.6 Application

L'aire d'un triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$.

3. Produit mixte

3.1 Définition

Le produit mixte de trois vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ de l'espace est le réel :

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w})$$

3.2 Propriétés

Le produit mixte est

• multilinéaire, c'est-à-dire linéaire par rapport à chacun des vecteurs,

• alterné, c'est-à-dire qu'il est nul si deux des vecteurs sont égaux.

Il en résulte que le produit mixte de trois vecteurs est changé de signe quand on permute deux des vecteurs, et inchangé quand on effectue une permutation circulaire des trois vecteurs.

3.3 Expression analytique dans une base orthonormale directe

C'est le déterminant des coordonnées des vecteurs :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) &= \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} \\ &= x \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}\end{aligned}$$

3.4 Applications

Le volume du parallélépipède d'arêtes OA, OB et OC est égal à

$$\left|(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})\right|.$$

Trois vecteurs sont coplanaires si, et seulement si, leur produit mixte est nul.

70 Géométrie euclidienne du plan et de l'espace

1re année

1. Distances et angles

1.1 Distance d'un point à une droite ou à un plan

On munit le plan, ou l'espace, euclidien d'un repère orthonormal qui définit l'orientation.

- **Dans le plan**

Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation : $ax + by + c = 0.$

Le vecteur $\overrightarrow{n}(a,b)$ est normal à $\mathcal{D}$.

La distance de $M_0(x_0,y_0)$ à $\mathcal{D}$ est : $d(M_0,\mathcal{D}) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

- **Dans l'espace**

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation : $ax + by + cz + d = 0.$

Le vecteur $\overrightarrow{n}(a,b,c)$ est normal à $\mathcal{P}$. La distance de $M_0(x_0,y_0,z_0)$ à $\mathcal{P}$ est :

$$d(M_0,\mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

La distance de M_0 à la droite $\mathcal{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ est :

$$d(M_0,\mathcal{D}) = \frac{\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}.$$

1.2 Distance entre deux droites

- **Perpendiculaire commune**

Soit $\mathcal{D}_1(A_1,\overrightarrow{u_1})$ et $\mathcal{D}_2(A_2,\overrightarrow{u_2})$ deux droites non parallèles définies par un point et un vecteur directeur.

La perpendiculaire commune à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est l'unique droite Δ qui rencontre $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ et qui est orthogonale à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

Elle est définie par :

$$M \in \Delta \iff \begin{cases} \det\left(\overrightarrow{A_1M}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}\right) = 0 \\ \det\left(\overrightarrow{A_2M}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}\right) = 0 \end{cases}$$

- **Distance entre deux droites**

$$d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = \frac{\left|\det\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right)\right|}{\| \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2} \|}.$$

1.3 Angles

- **Angle orienté de deux demi-droites du plan**

Soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux demi-droites de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$. La mesure de leur angle orienté est celle de l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$.

- **Angle de deux droites de l'espace**

Soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$. La mesure de leur angle est le réel $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2}}{\|\overrightarrow{u_1}\| \|\overrightarrow{u_2}\|}$.

- **Angle de deux plans de l'espace**

Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$. La mesure de leur angle est le réel $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{\|\overrightarrow{n_1}\| \|\overrightarrow{n_2}\|}$.

- **Angle d'une droite et d'un plan de l'espace**

Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

La mesure de leur angle est le réel $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin\theta = \dfrac{|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{u}\| \|\overrightarrow{n}\|}$.

2. Cercles et sphères

2.1 Dans le plan

- **Équation cartésienne d'un cercle**

Le cercle de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon R a pour équation :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

- **Cercle de diamètre** $[AB]$

C'est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

- **Intersection d'un cercle et d'une droite**

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre Ω et de rayon R, et $\mathcal{D}$ une droite.

– Si $d(\Omega,\mathcal{D}) < R$, alors $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ ont deux points d'intersection. Ils sont sécants.

– Si $d(\Omega,\mathcal{D}) = R$, alors $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ ont un point d'intersection. Ils sont tangents.

– Si $d(\Omega,\mathcal{D}) > R$, alors $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ n'ont aucun point d'intersection. Ils sont extérieurs.

2.2 Dans l'espace

- **Équation cartésienne d'une sphère**

La sphère de centre $\Omega(a,b,c)$ et de rayon R a pour équation :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

- **Sphère de diamètre** $[AB]$

C'est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

- **Intersection d'une sphère et d'un plan**

Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre Ω et de rayon R, et $\mathcal{P}$ un plan.

– Si $d(\Omega,\mathcal{P}) < R$, alors l'intersection de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{P}$ est un cercle.



On se donne un cercle dans l'espace comme intersection d'une sphère et d'un plan.

– Si $d(\Omega,\mathcal{P}) = R$, alors $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$ ont un point d'intersection. Ils sont tangents.

– Si $d(\Omega,\mathcal{P}) > R$, alors $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$ n'ont aucun point commun.

Isométries du plan et de l'espace

71

1re année

1. Définitions

1.1 Isométries

Une isométrie du plan (ou de l'espace) affine est une transformation affine qui conserve les distances.

Une application affine f est une isométrie si, et seulement si, l'application linéaire associée φ est un endomorphisme orthogonal.

L'ensemble des isométries est un sous-groupe du groupe affine du plan (ou de l'espace).

1.2 Déplacements, antidéplacements

Si $\det \varphi = 1$, on dit que f est un déplacement. Les angles orientés sont conservés.

Si $\det \varphi = -1$, on dit que f est un antidéplacement. Les angles orientés sont changés de signe.

L'ensemble des déplacements est un sous-groupe du groupe des isométries.

2. Rotation

f est une rotation affine si, et seulement si, φ est une rotation vectorielle.

3. Réflexions

3.1 Définition

f est une réflexion par rapport à un hyperplan affine H si, et seulement si, φ est une réflexion vectorielle, et si f possède un point invariant.

H est l'ensemble des points invariants par f.

3.2 Théorème

Étant donnés deux points distincts A et B du plan ou de l'espace, il existe une réflexion, et une seule, échangeant A et B.

3.3 Composée de deux réflexions dans le plan

La composée de deux réflexions par rapport aux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est :

- une translation si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles,
- une rotation de centre Ω si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes en Ω.

Réciproquement, toute translation, et toute rotation, peut se décomposer en produit de deux réflexions.

3.4 Composée de deux réflexions dans l'espace

La composée de deux réflexions par rapport aux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est :

- une translation si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles,
- une rotation d'axe Δ si $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \Delta$.

Réciproquement, toute translation, et toute rotation, peut se décomposer en produit de deux réflexions.

4. Déplacements du plan

Tout déplacement du plan est :

- soit une translation (pas de point invariant),
- soit une rotation de centre Ω (Ω est le seul point invariant).

5. Antidéplacements du plan

Tout antidéplacement du plan est :

- soit une réflexion d'axe D (les points invariants forment une droite D),
- soit la composée commutative d'une réflexion d'axe D et d'une translation de vecteur non nul appartenant à la direction de D.



Si l'on compose une réflexion s_D et une translation $t_{\overrightarrow{u}}$ sans que $\overrightarrow{u}$ appartienne à la direction de D, il ne s'agit pas de la forme réduite et la composition n'est pas commutative.

6. Déplacements de l'espace

6.1 Vissage

On appelle vissage la composée d'une rotation r et d'une translation t.

Tout vissage s'écrit, de façon unique, sous la forme réduite :

$$r_1 \circ t_1 = t_1 \circ r_1$$

où r_1 est une rotation d'axe Δ et de même angle que r et t_1 une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ appartenant à la direction de Δ.



Il faut être dans la forme réduite pour pouvoir permuter r_1 et t_1.

6.2 Théorème

Tout déplacement de l'espace est, soit une translation, soit une rotation, soit un vissage.

72 Similitudes directes du plan

1re année

1. Définition

Soit $k > 0$. Une similitude plane directe s de rapport k est une transformation affine du plan qui multiplie les distances par k et qui conserve les angles orientés.

2. Décomposition

Une application du plan dans lui-même est une similitude plane directe de rapport k si, et seulement si, elle est la composée d'un déplacement et d'une homothétie de rapport k.



Cette décomposition n'est pas unique.

3. Forme réduite

Soit s une similitude plane directe.

• Si s possède au moins deux points invariants, c'est l'identité du plan.

• Si s n'a aucun point invariant, c'est une translation de vecteur non nul.

• Si s a un seul point invariant Ω, alors s s'écrit de façon unique, sous la forme :

$$s = r \circ h = h \circ r$$

où h est l'homothétie de centre Ω et de rapport k et r la rotation de centre Ω et d'angle θ.

Ω est le centre de la similitude, θ l'angle de la similitude, k le rapport de la similitude.

4. Structure algébrique

L'ensemble des similitudes planes directes est un sous-groupe du groupe affine du plan.

5. Détermination d'une similitude plane directe

Étant donnés des points A, B, A', B' tels que $AB \neq 0$ et $A'B' \neq 0$, il existe une similitude directe s, et une seule, transformant A en A' et B en B'.

- Si $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$, alors s est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.
- Si $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et distincts, s est une homothétie dont le centre Ω est à l'intersection de (AA') et de (BB').
- Si $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires, notons I l'intersection de (AA') et de (BB'). Le centre Ω de la similitude s est à l'intersection des cercles $(AA'I)$ et $(BB'I)$.

6. Utilisation des nombres complexes

- **Théorème**

Une application f du plan dans lui-même est une similitude directe si, et seulement si, il existe deux nombres complexes a et b, avec $a \neq 0$, tels que tout point M d'affixe z ait pour image $M' = f(M)$ d'affixe :

$$z' = az + b$$

- **Forme réduite**

- Si $a = 1$ et $b = b_1 + \mathrm{i}b_2$, alors f est la translation de vecteur $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.
- Si $a \neq 1$, f est la similitude de rapport $k = |a|$, d'angle $\theta = \arg a$ et de centre Ω d'affixe $\dfrac{b}{1-a}\cdot$

73 Coniques

1re année

1. Définition par foyer et directrice

Soit F un point du plan affine euclidien, $\mathcal{D}$ une droite ne passant pas par F, e un réel strictement positif.

L'ensemble des points M tels que $\dfrac{MF}{d(M,\mathcal{D})} = e$ est la conique de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e.

C'est une ellipse si $e < 1$, une parabole si $e = 1$, une hyperbole si $e > 1$.

La perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par F est l'axe focal de la conique.

2. Parabole

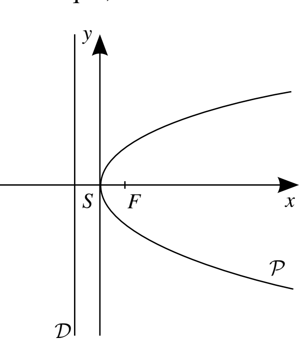
La parabole $\mathcal{P}$ et son axe focal ont un point commun unique, le sommet S.

Dans le repère orthonormal d'origine S et admettant l'axe focal comme axe des abscisses, l'équation de $\mathcal{P}$ est :

$$y^2 = 2px$$

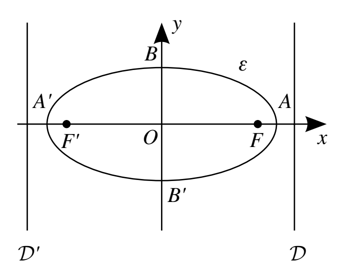
où p est le paramètre de la parabole.

F a pour coordonnées $\left(\dfrac{p}{2},0\right)$; $\mathcal{D}$ a pour équation $x = -\dfrac{p}{2}$.



3. Ellipse

3.1 Équation réduite



L'ellipse $\mathcal{E}$ et son axe focal ont deux points communs, A et A', sommets de l'axe focal.

Le milieu O de $[AA']$ est le centre de $\mathcal{E}$.

La médiatrice de $[AA']$ est l'axe non focal. Elle coupe l'ellipse en B et B', sommets de l'axe non focal.

Si F' et $\mathcal{D}'$ sont les symétriques de F et $\mathcal{D}$ par rapport à O, l'ellipse de foyer F', de directrice $\mathcal{D}'$ et d'excentricité e est la même ellipse.

On pose $AA' = 2a$ et $BB' = 2b$. Dans le repère orthonormal d'origine O et admettant l'axe focal comme axe des abscisses et l'axe non focal comme axe des ordonnées, l'équation de $\mathcal{E}$ est :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

En posant $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, on a $FF' = 2c$, $e = \dfrac{c}{a}$ et $\mathcal{D}$ a pour équation $x = \dfrac{a^2}{c}\cdot$

3.2 Représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0,2\pi[$$

3.3 Définition bifocale

Soit F et F' deux points distincts du plan et a un réel tel que $FF' < 2a$.

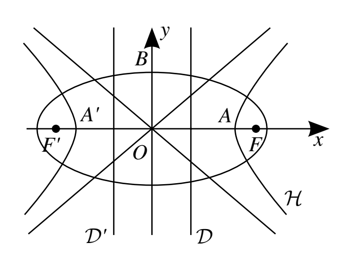
L'ensemble des points M du plan tels que $MF + MF' = 2a$ est une ellipse de foyers F et F'.



C'est avec ce point de vue qu'un jardinier dessine une ellipse pour réaliser une composition florale.

4. Hyperbole

4.1 Équation réduite



L'hyperbole $\mathcal{H}$ et son axe focal ont deux points communs, les sommets A et A'.

Le milieu O de $[AA']$ est le centre de $\mathcal{H}$.

La médiatrice de $[AA']$ est l'axe non focal. Il ne rencontre pas l'hyperbole.

Si F' et $\mathcal{D}'$ sont les symétriques de F et $\mathcal{D}$ par rapport à O, l'hyperbole de foyer F', de directrice $\mathcal{D}'$ et d'excentricité e est la même hyperbole.

On pose $AA' = 2a$, $FF' = 2c$ et $b^2 = c^2 - a^2$. Dans le repère orthonormal d'origine O et admettant l'axe focal comme axe des abscisses et l'axe non focal comme axe des ordonnées, l'équation de $\mathcal{H}$ est :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

On a $e = \dfrac{c}{a}$ et $\mathcal{D}$ a pour équation $x = \dfrac{a^2}{c}\cdot$

4.2 Équation des asymptotes

$$y = \frac{b}{a}x \quad ; \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

4.3 Représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = a \operatorname{ch} \theta \\ y = b \operatorname{sh} \theta \end{cases} \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

4.4 Définition bifocale

Soit F et F' deux points distincts du plan et a un réel tel que $0 < 2a < FF'$.

L'ensemble des points M du plan tels que $|MF - MF'| = 2a$ est une hyperbole de foyers F et F'.

Courbes planes paramétrées

74

1re année

1. Généralités

Soit $\overrightarrow{F}$ une fonction vectorielle de classe $\mathcal{C}^k$ (k aussi grand que nécessaire) définie sur une partie non vide D de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. L'ensemble Γ des points M tels que

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{F}(t) \qquad t \in D$$

est une courbe paramétrée.

Si D est un intervalle, il s'agit d'un arc de courbe.

On dit que $\overrightarrow{F}(t)$ est une représentation paramétrique de Γ, ou encore que Γ a pour équations paramétriques :

$$x = x(t) \ ; \ y = y(t) \qquad t \in D.$$



Une même courbe Γ (ensemble de points) a plusieurs paramétrages.

2. Représentation propre

Pour construire Γ, on détermine d'abord un domaine de représentation propre, c'est-à-dire une partie D_1 de D telle que la courbe géométrique Γ soit entièrement décrite, et une seule fois, lorsque t décrit D_1.



Cette étape apparaît lorsque x et y sont périodiques avec une période commune, ou lorsqu'elles sont toutes les deux paires.

3. Domaine d'étude

Si x et y sont deux fonctions impaires, Γ est symétrique par rapport au point O et il suffit de faire l'étude sur $D_1 \cap \mathbb{R}_+$.

Si x est paire et y impaire, Γ est symétrique par rapport à la droite $x'x$ et il suffit de faire l'étude sur $D_1 \cap \mathbb{R}_+$.

Si x est impaire et y paire, Γ est symétrique par rapport à la droite $y'y$ et il suffit de faire l'étude sur $D_1 \cap \mathbb{R}_+$.



D'autres invariances de Γ peuvent être utilisées, par exemple une invariance par translation.

4. Étude locale

Soit p le plus petit entier tel que $\overrightarrow{F}^{(p)}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$ et q ($p < q$) l'ordre de la première dérivée telle que $\left(\overrightarrow{F}^{(p)}(t_0), \overrightarrow{F}^{(q)}(t_0)\right)$ forme une base du plan vectoriel.

$\overrightarrow{F}^{(p)}(t_0)$ est un vecteur directeur de la tangente en $M(t_0)$ à Γ.

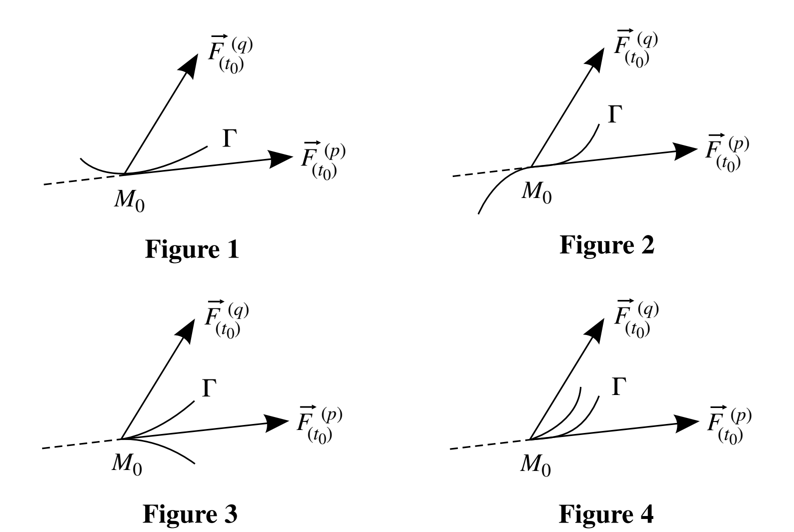
Si $p \neq 1$, le point $M(t_0)$ est stationnaire (ou singulier). Si $p = 1$, c'est un point régulier. Si $p = 1$ et $q = 2$, c'est un point birégulier.

Si p impair et q pair, $M(t_0)$ est un point ordinaire (*cf. fig. 1*).

Si p impair et q impair, $M(t_0)$ est un point d'inflexion (*cf. fig. 2*).

Si p pair et q impair, $M(t_0)$ est un point de rebroussement de première espèce (*cf. fig. 3*).

Si p pair et q pair, $M(t_0)$ est un point de rebroussement de deuxième espèce (*cf. fig. 4*).



5. Branches infinies

La courbe Γ présente une branche infinie pour t tendant vers t_0 (t_0 fini ou non) si au moins une des coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de M tend vers l'infini lorsque t tend vers t_0.

Si $x(t) \to x_0 \in \mathbb{R}$ et $y(t) \to \pm\infty$, alors la droite $x = x_0$ est asymptote à Γ.

Si $x(t) \to \pm\infty$ et $y(t) \to y_0 \in \mathbb{R}$, alors la droite $y = y_0$ est asymptote à Γ.

Si $x(t) \to \pm\infty$ et $y(t) \to \pm\infty$, on cherche la limite éventuelle de $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ lorsque t tend vers t_0.

- Si $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 0$, Γ présente une branche parabolique de direction $x'x$.
- Si $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$, Γ présente une branche parabolique de direction $y'y$.
- Si $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = a$, limite finie non nulle, on étudie $y(t) - ax(t)$.
  - Si $\lim\limits_{t\to t_0}[y(t) - ax(t)] = \pm\infty$, Γ présente une branche parabolique de coefficient directeur a.
  - Si $\lim\limits_{t\to t_0}[y(t) - ax(t)] = b$, la droite $y = ax + b$ est asymptote à Γ et la position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $y(t) - ax(t) - b$.

6. Points multiples

A est un point multiple de Γ s'il existe au moins deux valeurs $t_1 \neq t_2$ de D_1 telles que $M(t_1) = M(t_2) = A$. On le détermine en résolvant :

$$x(t_1) = x(t_2) \;\; ; \;\; y(t_1) = y(t_2) \;\; ; \;\; t_1 \neq t_2.$$

75 Courbes planes en coordonnées polaires

1re année

1. Représentation polaire

Soit $\left(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$ un repère orthonormal du plan. À tout point M, distinct de O, on peut associer des coordonnées polaires (ρ,θ) telles que $\overrightarrow{OM}=\rho\overrightarrow{u}$.

$\left(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$ est le repère polaire orthormal lié à M et défini par :

$$(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{u})=\theta \quad ; \quad (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=\frac{\pi}{2}.$$



Il n'y a pas unicité des coordonnées polaires d'un point. Si $k\in\mathbb{Z}$, alors $(\rho,\theta+2k\pi)$ et $(-\rho,\theta+\pi+2k\pi)$ repèrent le même point M.

Le point O est repéré par $\rho=0$ et θ quelconque.

Une courbe en coordonnées polaires est l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées polaires sont liées par une relation du type $\rho=f(\theta)$ où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable autant de fois qu'il sera nécessaire.

2. Domaine d'étude

Soit Γ la courbe d'équation polaire $\rho=f(\theta)$ et D l'ensemble de définition de f.

On détermine d'abord un domaine de représentation propre, c'est-à-dire une partie D_1 de D telle que la courbe géométrique Γ soit entièrement décrite, une fois et une seule, lorsque θ décrit D_1.

Si f est paire, Γ est symétrique par rapport à la droite $x'x$ et il suffit de faire l'étude sur $D_1\cap\mathbb{R}_+$.

Si f est impaire, Γ est symétrique par rapport à la droite $y'y$ et il suffit de faire l'étude sur $D_1\cap\mathbb{R}_+$.

3. Tangente en un point

En $M(\theta)\neq O$, Γ admet une tangente dirigée par le vecteur

$$\overrightarrow{T} = \rho'(\theta)\overrightarrow{u} + \rho(\theta)\overrightarrow{v} .$$

En $M(\theta_0) = O$, Γ admet une tangente d'angle polaire θ_0.

4. Points d'inflexion

Les points d'inflexion de Γ correspondent aux valeurs de θ pour lesquelles l'une des deux expressions suivantes s'annule en changeant de signe, avec $\rho \neq 0$:

$$\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' \ ; \ \frac{1}{\rho} + \left(\frac{1}{\rho}\right)''.$$

5. Branches infinies

- Si $\theta \to \pm\infty$, la courbe Γ présente une spirale.
- Si $\theta \to \theta_0$ et $\rho = f(\theta) \to \pm\infty$, alors l'axe OX d'angle θ_0 est une direction asymptotique de Γ.

Dans le repère orthonormal direct (OX, OY), l'ordonnée de M s'écrit $Y = \rho(\theta)\sin(\theta - \theta_0)$ et on étudie sa limite lorque θ tend vers θ_0.

Si $\lim_{\theta\to\theta_0} \rho(\theta)\sin(\theta - \theta_0) = l$ (limite finie), alors Γ admet pour asymptote la droite $Y = l$.



Attention en traçant la droite $Y = l$ à bien utiliser le nouveau repère (OX, OY).

6. Équation polaire de quelques courbes

- Droite passant par O : $\theta =$cte.
- Droite ne passant pas par O : $\rho = \dfrac{1}{a\cos\theta + b\sin\theta}$.
- Cercle de centre O : $\rho =$cte.
- Cercle passant par O : $\rho = a\cos\theta + b\sin\theta$.
- Conique de foyer O, de paramètre p, d'excentricité e :

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}.$$

76 Étude métrique des courbes planes

1re année

1. Longueur d'un arc de courbe

Soit Γ un arc de courbe de classe $\mathcal{C}^2$ admettant une représentation paramétrique $M(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$, avec $t \in [a,b]$, dans un repère orthormal $\big(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\big)$ de l'espace.

En un point régulier, $\overrightarrow{T} = \dfrac{\overrightarrow{OM}'(t)}{\|\overrightarrow{OM}'(t)\|}$ est un vecteur unitaire qui dirige la tangente en M à Γ.

L'arc est orienté par le choix de l'un des deux sens de parcours possibles, ce qui revient à distinguer les vecteurs unitaires tangents (opposés) $\overrightarrow{T}_+$ et $\overrightarrow{T}_-$.

L'abscisse curviligne s est un paramétrage de Γ tel que $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s}$ soit unitaire.

La longueur de Γ est :

$$L = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,\mathrm{d}t\,.$$

Elle est indépendante du paramétrage choisi.

On note souvent $\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,\mathrm{d}t$ où s est l'abscisse curviligne.

2. Courbure d'une courbe plane

2.1 Repère de Frenet

Le repère orthonormal direct $(M, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$ est le repère de Frenet au point M.

2.2 Formules de Frenet

En un point birégulier, on a :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \gamma\overrightarrow{N} \quad ; \quad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{N}}{\mathrm{d}s} = -\gamma\overrightarrow{T}$$

où γ est la courbure de Γ au point M.

2.3 Repérage angulaire

Si α est l'angle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{T})$, on a $\gamma = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$.

2.4 Rayon de courbure

En un point birégulier M, la courbure est non nulle et $R = \frac{1}{\gamma}$ s'appelle rayon de courbure de Γ en M. On a :

en coordonnées paramétriques : $R = \dfrac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - y'x''}$

en coordonnées polaires : $R = \dfrac{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}$

Le centre de courbure en M est le point I défini par $\overrightarrow{MI} = R\,\overrightarrow{N}$.

77 Compléments sur les courbes

PT

2e année

1. Enveloppe d'une famille de droites dans le plan

1.1 Définition

Une famille de droites (D_t) définies par :

$$a(t)\,x + b(t)\,y + c(t) = 0$$

où a, b et c sont définies et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I, admet pour enveloppe une courbe (E) si :

• toute droite (D_t) est tangente à (E) en au moins un point de contact dit point caractéristique de (E) ;

• par tout point de (E) passe au moins une droite (D_t) tangente à (E) en ce point.

1.2 Caractérisation

Si le déterminant $t \mapsto \Delta(t) = \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ a'(t) & b'(t) \end{vmatrix}$ ne s'annule pas sur I, la famille (D_t) admet pour enveloppe l'ensemble des points (x, y) solutions du système :

$$\begin{cases} a(t)\,x + b(t)\,y + c(t) = 0 & (D_t) \\ a'(t)\,x + b'(t)\,y + c'(t) = 0 & (D'_t) \end{cases}$$



Dans le cas particulier où $a(t)\,x + b(t)\,y + c(t)$ est un polynôme en t de degré 2, si le déterminant $\Delta(t)$ ne s'annule pas, on obtient une équation cartésienne de (E) en écrivant que le discriminant du trinôme est nul.

2. Développée, développante (courbes planes)

2.1 Développée

On appelle développée d'une courbe paramétrée Γ l'ensemble des centres de courbure I de Γ.

C'est aussi l'enveloppe des normales à Γ.

2.2 Développante

On appelle développante de Γ toute courbe admettant Γ pour développée.

Si les points M de Γ sont repérés par l'abscisse curviligne s, les points P d'une développante vérifient :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + (s_0 - s)\ \overrightarrow{T}$$

où s_0 est une constante.

3. Courbes de l'espace

Soit Γ une courbe de classe $\mathcal{C}^2$ admettant une représentation paramétrique $t \mapsto M(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ dans un repère orthonormal $\big(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\big)$ de l'espace.

En un point régulier, $\overrightarrow{T} = \dfrac{\overrightarrow{OM}'(t)}{\|\overrightarrow{OM}'(t)\|}$ est un vecteur unitaire qui dirige la tangente en M à Γ.

En paramétrant Γ par l'abscisse curviligne s, on a $\overrightarrow{T} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big(\overrightarrow{OM}\big)$.

Le plan passant par M et orthogonal à $\overrightarrow{T}$ est le plan normal en M à Γ.

78 Généralités sur les surfaces

2e année

1. Représentation d'une surface

Une surface $\mathcal{S}$ peut être représentée :

– soit par une équation cartésienne $f(x,y,z) = 0$ où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$,

– soit par des équations paramétriques $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{F}(u,v)$.

Un point de $\mathcal{S}$ est régulier si $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y,z) \neq \overrightarrow{0}$, ou si $\left(\dfrac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u}, \dfrac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}\right)$ est une famille libre.

2. Plan tangent

- En un point régulier $M(x,y,z)$ de $\mathcal{S}$, le plan tangent en M à $\mathcal{S}$ a pour équation :

$$(X-x)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + (Y-y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + (Z-z)\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0$$

et $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y,z)$ est normal en M à $\mathcal{S}$.

- Sous forme paramétrique, le plan tangent en M à $\mathcal{S}$ est défini par les vecteurs directeurs $\left(\dfrac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u}, \dfrac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}\right)$ et la normale par le vecteur directeur $\dfrac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}$.

3. Intersection de deux surfaces

- Pour déterminer explicitement l'intersection de deux surfaces $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$, il est préférable que l'une soit sous forme cartésienne et l'autre sous forme paramétrique.

On reporte alors les équations paramétriques de l'une dans l'équation cartésienne de l'autre.

• En un point régulier M_0 de l'intersection de $\mathcal{S}_1$ et de $\mathcal{S}_2$, si les plans tangents respectifs $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont distincts, la courbe $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ a pour tangente la droite $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

4. Surfaces réglées

Une surface est réglée si elle peut être engendrée par une famille de droites dites génératrices de la surface.



Les surfaces réglées les plus simples sont les cylindres et les cônes.

79 Surfaces usuelles

2e année

1. Cylindres

1.1 Définitions

Un cylindre de direction D et de courbe directrice $\mathcal{C}$ est l'ensemble des droites parallèles à D et rencontrant $\mathcal{C}$. Ces droites sont les génératrices du cylindre.

On suppose que $\mathcal{C}$ n'est pas une courbe plane dont le plan contient D.



Toute section du cylindre par un plan non parallèle à D peut être utilisée comme courbe directrice plane. On dit que c'est une base du cylindre.

Si le plan de section est orthogonal à D, on obtient une section droite Γ. On parle alors de cylindre droit de base Γ.

Un cylindre de révolution admet une section droite circulaire.

1.2 Plans tangents

Le plan tangent en un point M d'une génératrice Δ d'un cylindre est défini par Δ et la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'intersection de $\mathcal{C}$ et de Δ.



C'est le même pour tous les points de Δ.

1.3 Équations

La forme la plus générale de l'équation d'un cylindre est $f(P,Q) = 0$ où $P = 0$ et $Q = 0$ sont les équations de deux plans non parallèles, leur intersection donnant la direction du cylindre.

Avec un repère adapté, l'équation d'un cylindre droit est de la forme $g(x,y) = 0$.

Un cylindre de révolution peut alors être représenté

• sous forme cartésienne par : $x^2 + y^2 = R^2$,

• sous forme paramétrique par :

$$x = R\cos\theta \quad ; \quad y = R\sin\theta \quad ; \quad z = z.$$

Il s'agit des coordonnées cylindriques d'un point de l'espace.

2. Cônes

2.1 Définitions

Un cône de sommet S et de courbe directrice $\mathcal{C}$ est l'ensemble des droites passant par S et rencontrant $\mathcal{C}$. Ces droites sont dites génératrices du cône.

On suppose que $\mathcal{C}$ n'est pas une courbe plane dont le plan contient S.



Toute section du cône par un plan ne passant pas par S peut alors être utilisée comme courbe directrice plane. On dit que c'est une base du cône.

2.2 Plans tangents

Soit M un point du cône. Il appartient à une génératrice Δ qui rencontre en P une base $\mathcal{C}$ du cône. Le plan tangent en M au cône passe par S et contient la tangente en P à $\mathcal{C}$.



C'est le même pour tous les points de Δ.

2.3 Équations

La forme la plus générale de l'équation d'un cône est $f\left(\frac{P}{R},\frac{Q}{R}\right)=0$ où $P=0$, $Q=0$ et $R=0$ sont les équations de trois plans dont l'intersection est le sommet S.

Comme un cône est invariant par toute homothétie de centre S, le cône est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{SM}=\lambda\,\overrightarrow{SP}$ où λ est un réel quelconque et P un point quelconque de $\mathcal{C}$.

3. Contours apparents

3.1 Pour une direction donnée

Soit $\mathcal{S}$ une surface et $\overrightarrow{u}\neq 0$.

- Le cylindre circonscrit à $\mathcal{S}$, de direction $\overrightarrow{u}$, est l'ensemble des tangentes à $\mathcal{S}$ dirigées par $\overrightarrow{u}$.

- Le contour apparent de $\mathcal{S}$, pour la direction $\overrightarrow{u}$, est l'ensemble des points de $\mathcal{S}$ dont la direction du plan tangent contient $\overrightarrow{u}$.

3.2 Pour un point donné

Soit $\mathcal{S}$ une surface et A un point.

- Le cône circonscrit à $\mathcal{S}$, de sommet A, est l'ensemble des tangentes à $\mathcal{S}$ qui passent par A.
- Le contour apparent de $\mathcal{S}$, du point de vue de A, est l'ensemble des points de $\mathcal{S}$ dont le plan tangent contient A.

4. Surfaces de révolution

4.1 Définitions

Une surface de révolution Σ d'axe D est obtenue en faisant tourner une courbe $\mathcal{C}$ autour de la droite D.

Tout plan contenant D est un plan méridien et son intersection avec Σ est une méridienne.

Les cercles, intersections de Σ avec des plans perpendiculaires à D, sont les parallèles de la surface.

4.2 Équations

La forme la plus générale de l'équation d'une surface de révolution est $f(P,S) = 0$ où $P = 0$ et $S = 0$ sont les équations d'un plan et d'une sphère.

L'axe de Σ est alors la droite perpendiculaire au plan et passant par le centre de la sphère.

Toute équation de la forme $g(x^2 + y^2, z) = 0$ représente une surface de révolution d'axe $\left(O, \overrightarrow{k}\right)$.

Quadriques 80

2e année

1. Définitions

Une surface du second degré $f(x,y,z) = 0$, où f est un polynôme de degré 2 par rapport aux trois variables, peut être soit deux plans, soit un cylindre, soit un cône, soit une quadrique propre de l'un des cinq types qui suivent.

On peut les décrire à partir de leurs équations réduites dans un repère orthormal.

2. Types de quadrique

- **Ellipsoïde**

Équation réduite : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$

- **Hyperboloïde à une nappe**

Équation réduite : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$ C'est une surface réglée.

- **Hyperboloïde à deux nappes**

Équation réduite : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1.$

- **Paraboloïde elliptique**

Équation réduite : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = z.$

- **Paraboloïde hyperbolique**

Équation réduite : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = z.$ C'est une surface réglée.

3. Centres de symétrie

Tout centre de symétrie d'une surface du second degré $f(x,y,z) = 0$ vérifie $\overrightarrow{\text{grad}} f(x,y,z) = \overrightarrow{0}$, et la recherche d'une forme réduite se fait en prenant pour origine un tel point.

4. Réduction de l'équation d'une surface du second degré

Soit $\mathcal{S}$ une surface algébrique du second degré d'équation

$f(x,y,z) = 0$ où f est un polynôme de degré 2.

Les termes de f de degré égal à 2 définissent une forme quadratique q dont la matrice A est symétrique et réelle. A admet donc trois valeurs propres α, β, γ.

- **Cas où les trois valeurs propres sont non nulles (soit rg $q = 3$)**

Si α, β et γ sont de même signe, $\mathcal{S}$ peut être vide, réduite à un point, ou un ellipsoïde.

Si α, β et γ ne sont pas de même signe, $\mathcal{S}$ peut être un cône, un hyperboloïde à une nappe ou à deux nappes.

- **Cas où une seule valeur propre est nulle (soit rg $q = 2$)**

$\mathcal{S}$ peut être vide, un paraboloïde elliptique ou hyperbolique, une droite, deux plans sécants, un cylindre elliptique ou hyperbolique.

- **Cas où deux valeurs propres sont nulles (soit rg $q = 1$)**

$\mathcal{S}$ peut être vide, un plan, deux plans parallèles, ou un cylindre parabolique.

Index

A

B

C

G

H

I

Q

R

W